

## Baccalauréat C Maroc juin 1977

### EXERCICE 1

6 POINTS

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{|\text{Log } x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de la fonction  $f$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$ . On sera amené à calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} \right)$$

3. Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18 360.
2. En déduire dans l'ensemble  $\mathbb{N}$ , la résolution de l'équation, (d'inconnue  $b$ )

$$b^3 [b^2 + (b + 1)^2] = 18360.$$

3. Existe-t-il un nombre  $b$  tel que le nombre qui s'écrit 36 723 dans le système décimal s'écrit  $\overline{442003}$  dans le système de numération à base  $b$ ?

### PROBLÈME

11 POINTS

#### Partie A

Le plan affine euclidien  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère l'application affine  $S_1$  de  $P$  dans  $P$  qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  définies par :

$$\begin{cases} x' = -3x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x - 3y \end{cases}$$

1. **a.** Soit les nombres complexes  $z$  et  $z'$  affixes des points  $M$  et  $M'$   
( $z = x + iy$ ;  $z' = x' + iy'$ ). Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
- b.** Préciser la nature de l'application  $S_1$  et ses éléments caractéristiques.
2. On considère la suite de points :

$$P_0(1; 0), \quad P_1 = S(P_0), \quad P_2 = S(P_1), \quad \dots, \quad P_n = S(P_{n-1})$$

Les coordonnées de  $P_n$  étant notées  $(\alpha_n; \beta_n)$ .

- a. Quelle est la nature de l'application qui transforme  $P_0$  en  $P_n$  ?
- b. Déterminer  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  en fonction de  $n$ .
3. Soit  $(C)$  la courbe d'équation :  $x^2 - y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}xy - 1 = 0$ .  
Déterminer une équation de la courbe  $(C')$  transformée par  $S_1$  de la courbe  $(C)$ . Quelle est la nature de  $(C')$  ?

### Partie B

Soit  $S$  l'application de  $P$  dans  $P$  qui au point  $N(x; y)$  fait correspondre le point  $N'(x'; y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + a \\ y' = \beta x + \alpha y + b \end{cases}, \quad \alpha, \beta, a, b \text{ étant quatre réels.}$$

1. a. À quelle condition  $S$  est-elle une similitude? Préciser dans ce cas son rapport et son angle.
- b. On considère la suite de points

$$A_0(u_0; v_0), u_0 \neq 0, \quad A_1 = S(A_0), \quad \dots, \quad A_n = S(A_{n-1})$$

Les coordonnées de  $A_n$  sont notées  $(u_n; v_n)$ . On définit ainsi deux suites  $(u)$  et  $(v)$ .

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad u_{n+1} - u_n = \alpha(u_n - u_{n-1}) - \beta(v_n - v_{n-1}).$$

2. Dans cette question, on pose  $\beta = 0$ . Soit la suite  $(\omega)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega_n = u_{n+1} - u_n.$$

- a. Vérifier que  $(\omega)$  est une suite géométrique.
- b. Écrire  $u_n$  en fonction de  $n, u_0, \alpha$  et  $a$ . On pourra calculer

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i.$$

- c. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(u)$  est-elle convergente? Quelle est alors sa limite?
3. Dans cette question  $\beta = a = 0$ .
- a. Discuter la nature de l'application  $S$ , suivant les valeurs de  $\alpha$ .
- b. Déterminer dans ces différents cas les coordonnées de l'isobarycentre  $G_n$  des points  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ .
- c. Étudier la limite du vecteur  $\overrightarrow{OG_n}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , suivant les valeurs de  $\alpha$ .