

♣ Baccalauréat C Maroc juin 1981 ♣

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$x^2 - 9y^2 = -35.$$

EXERCICE 2

Soit \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes et soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$f(z) = z^3 + (5i - 1)z^2 + (-1 + 4i)z + 3 + 7i.$$

1. Calculer $f(i)$. En déduire une factorisation de $f(z)$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

PROBLÈME

Soit \mathbb{R} le corps des nombres réels, \mathbb{R}_+^* le sous-ensemble des réels strictement positifs.

Soit f et g les fonctions numériques définies sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(t) = \frac{1}{t} \cos 2t \quad \text{et} \quad g(t) = -\sin 2t.$$

Partie A

Soit E l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des combinaisons linéaires à coefficients réels de f et g , muni des lois d'addition des fonctions et de multiplication d'une fonction par un réel.

1. Vérifier que (f, g) est une base de E .
2. Soit φ l'application de $E \times E$ dans \mathbb{R} définie par

$$\varphi(u, v) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2 u(t) \cdot v(t) dt.$$

- a. Montrer que φ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E .
- b. Montrer que la base (f, g) est orthogonale pour le produit scalaire φ .
- c. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur l'espace vectoriel E pour lequel la base (f, g) est orthonormée.

Partie B

Soit \mathcal{D} un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et A_t l'application affine de \mathcal{D} dans \mathcal{D} qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ avec

$$\begin{cases} x' &= f(t).x - g(t).y \\ y' &= g(t).x + f(t).y. \end{cases}$$

1. Montrer que A_t est une similitude plane directe et en préciser ses éléments caractéristiques (centre, rapport, mesure de l'angle).
2. **a.** Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que A_t soit une rotation.
b. Déterminer l'ensemble des réels $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que A_t soit une homothétie.
3. Existe-t-il $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A_{\frac{\pi}{8}} \circ A_t = A_1$?
(La loi \circ étant la composition des applications.)

Partie C

1. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle réel $I =]0 ; \pi]$ par

$$h(t) = \cos 2t + 2t \sin 2t.$$

- a.** Étudier les variations de h sur I .
- b.** Montrer que l'équation $h(t) = 0$ admet sur I exactement deux solutions, notées t_0 et t'_0 , ($t_0 < t'_0$); vérifier que

$$\frac{\pi}{4} < t_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{4} < t'_0 < \pi.$$

(On ne cherchera pas à calculer numériquement t_0 et t'_0 mais on justifiera rigoureusement leur existence).

- c.** En déduire l'étude du signe de $h(t)$ lorsque t appartient à I .
2. **a.** Étudier la fonction f sur I (sens de variation, extremums, limites).
b. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$-\frac{1}{t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}.$$

- c.** Résoudre dans \mathbb{R}_+^* l'équation $f(t) = 0$.
3. Soit h_1 et h_2 les fonctions numériques définies sur \mathbb{R}_+^* par

$$h_1(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad h_2(t) = \frac{1}{t}.$$

On appelle C, C_1, C_2 les courbes représentatives des fonctions f, h_1, h_2 dans un plan affine \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- a.** Déterminer les points d'intersection de C et de C_1 et montrer qu'en ces points les deux courbes ont même tangente.
- b.** Déterminer les points d'intersection de C et de C_2 et montrer qu'en ces points les deux courbes ont même tangente.
- c.** Soit C', C'_1 et C'_2 les courbes représentatives des restrictions à I des fonctions f, h_1 et h_2 .
Tracer dans un même repère orthonormé C', C'_1 et C'_2 .
- d.** En déduire sans justification le tracé des courbes C, C_1, C_2 .

Partie D

Dans un plan affine euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, M est un point mobile dont les coordonnées à la date t ($t \in \mathbb{R}_+^*$) sont

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

1. Déterminer les vecteurs \vec{V} , vitesse de M , et $\vec{\Gamma}$ accélération de M à la date t . Vérifier que le mouvement de M est retardé sur $]0; +\infty[$.
2. a. Vérifier que l'application $t \mapsto \|\vec{OM}\|$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Déterminer l'angle (\vec{i}, \vec{OM}) .
- b. Calculer

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} g(t)$$

puis

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t).$$

- c. Représenter approximativement dans \mathcal{P} les positions de M aux instants $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ et 2π . (On prendra $\pi \approx 3$).
- d. En déduire l'allure de la trajectoire de M sur $]0; +\infty[$.