

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat C Maroc juin 1982 ⌘

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan affine euclidien E, on considère le triangle ABC isocèle rectangle en A tel que

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = 3a \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

1. Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, -3, 2. Construire ce point.

2. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $M \mapsto f(M) = 4\|\vec{MA}\|^2 - 3\|\vec{MB}\|^2 + 2\|\vec{MC}\|^2.$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$f(M) = -36a^2.$$

Représenter cet ensemble.

EXERCICE 2

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

1. Déterminer l'ensemble image Im f et le noyau Ker f de l'endomorphisme f. Montrer que Im f et Ker f sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de l'espace vectoriel E.
2. a. Montrer que $f \circ f = 3f$.
b. Démontrer que pour tout vecteur \vec{u} de E,

$$\vec{u} \in \text{Im } f \iff f(\vec{u}) = 3\vec{u}.$$

3. On désigne par id_E l'application identique de E. Montrer qu'on peut trouver un réel α non nul tel que l'endomorphisme $g = \alpha f - \text{id}_E$ soit une involution. Montrer alors que g est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à Im f.

PROBLÈME

12 points

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ direct. On appelle \mathcal{P} , le plan vectoriel associé à P.

Partie A

Pour tout réel a non nul, on considère l'application affine F_a de \mathbb{P} dans \mathbb{P} qui au point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = ia\bar{z} + 2a(1 - i)$$

avec $\bar{z} = x - iy$.

1. Donner suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants de F_a .
2. Pour quelles valeurs de a , F_a est-elle une isométrie de \mathbb{P} ?
Dans chaque cas préciser les éléments caractérisant F_a .

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log} \left(\frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} \right).$$

On appelle (Γ) sa courbe représentative dans le plan affine \mathbb{P} .

1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \text{Log} \left[\frac{1 + 3e^{-2x}}{1 - e^{-x}} \right]$.
Étudier la fonction f . Préciser les asymptotes à Γ . Construire Γ (unité : 2 cm).
2. On appelle g la restriction de f à l'intervalle $I = [\text{Log} 3 ; +\infty[$.
Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
Énumérer les propriétés de g^{-1} .
Sans calculer $(g^{-1})(x)$ déterminer $(g^{-1})'(\text{Log} 7)$ (nombre dérivé de (g^{-1}) au point $\text{Log} 7$).
3. α étant un réel strictement positif, résoudre $f(x) = f(\alpha)$.
4. Étudier les variations de la fonction numérique définie sur \mathbb{R}_+^* par
 $v(x) = \text{Log} \left(\frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} \right)$ (ne pas construire sa courbe).
Calculer $v(\text{Log} 3)$.
5. Soit $F = g^{-1} \circ f$.
Donner l'ensemble de définition de F .
Exprimer $F(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie B

On considère le mouvement d'un point m de \mathbb{P} dont les coordonnées sont données à l'instant t par

$$\begin{cases} x &= \text{Log} \left(t + 2 + \frac{4}{t} \right) + 2 \\ y &= \text{Log}(t + 1) - 2. \end{cases}$$

Soit (γ) la trajectoire de m lorsque t décrit \mathbb{R}_+^* .

1. Donner une équation cartésienne de la courbe (γ') transformée de (γ) par l'application F_1 (de la partie A 2. avec $a = 1$).
2. À l'aide de la courbe (Γ) tracée en B, construire la trajectoire (γ) .
Déterminer les asymptotes à (γ) .
3. Donner le nombre de points de (γ) d'abscisse 4.
La courbe (γ) est-elle la courbe représentative d'une fonction numérique?