Baccalauréat C Maroc juin 1983

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Calculer les restes dans la division par 13 des puissances successives de 6.
2. En déduire le reste dans la division par 13 de $(1\,982)^{1\,983}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre

$$6^{12n} + \left(2 \times 6^n\right) + 2$$

est-il multiple de 13 ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. On considère la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\sqrt{d^2 - x^2},$$

où d désigne un nombre réel strictement positif fixé.

   a. Étudier f et dessiner sa courbe représentative dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

   b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = d$.

2. Déterminer l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets appartiennent à un même cercle de rayon R, R désignant un nombre réel strictement positif fixé.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de $\mathscr{P}$ et soit k un nombre réel. On considère l'endomorphisme φ_k de $\mathscr{P}$ défini par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
\varphi_k\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \dfrac{1}{2}\left[(1+k)\overrightarrow{\imath} + (1-k)\overrightarrow{\jmath}\right]\\
\varphi_k\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \dfrac{1}{2}\left[(1-k)\overrightarrow{\imath} + (1+k)\overrightarrow{\jmath}\right]
\end{array}\right.$$

1. Pour quelle valeur de k, φ_k n'est-il pas bijectif ?
   Pour cette valeur de k, déterminer la nature de φ_k et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles φ_k est une isométrie qu'on précisera.
3. Déterminer les réels λ pour lesquels il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de $\mathscr{P}$ tel que $\varphi_k\left(\overrightarrow{u}\right) = k\overrightarrow{u}$.
4. On suppose que $k \neq 1$. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs trouvées à la question A 3. avec λ_2 indépendante de k.

a. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\varphi_k\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda_1 \overrightarrow{u}$ est une droite vectorielle D_1 dont on précisera une base I.

b. Montrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $\varphi_k\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda_2 \overrightarrow{u}$ est une droite vectorielle D_2 dont on précisera une base J.

c. Montrer que $(I,\ J)$ est une base orthogonale de $\mathscr{P}$.
Donner la matrice de φ_k dans cette base.

Partie B

Soit P un plan associé à $\mathscr{P}$. On munit P d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ avec

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right).$$

On considère l'application affine f_k de P à laquelle est associée l'endomorphisme φ_k et telle que le point O soit invariant avec $k \neq 0$.

1. Dans le repère $\mathscr{R}$, si le point M a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$, déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point $M' = f_k(M)$.

2. Soit $g_1 : x \longmapsto g_1(x) = (1-x)\text{e}^x$.
Construire la représentation graphique $\mathscr{G}_1$ de g_1 dans le repère $\mathscr{R}$.

3. Soit $\mathscr{G}_k$ l'image de $\mathscr{G}_1$ par f_k. On appelle g_k la fonction dont la représentation graphique est $\mathscr{G}_k$.
Montrer que pour tout k ($k \in \mathbb{R}*$), les courbes $\mathscr{G}_k$ admettent une asymptote commune et passent par un point commun.
Donner, selon les valeurs de k, la tableau de variations de g_k et dessiner la représentation graphique de g_k.

4. Déterminer k pour que $\displaystyle\int_0^1 g_k(x)\,\text{d}x = 1$.