

♣ Baccalauréat Maroc juin 1963 mathématiques élémentaires ♣

EXERCICE 1

On donne le nombre complexe $z = -1 - i$.

Calculer son module et son argument.

Mettre z sous forme trigonométrique.

En déduire les nombres complexes dont le cube est égal à z . Donner les résultats sous la forme algébrique, sans utiliser de table numérique.

EXERCICE 2

On donne une sphère de centre O et de rayon R , un plan (P) passant par O , le rayon OA perpendiculaire à (P) et un plan (Π) parallèle à (P) et coupant OA en H tel que $OH = x$ ($0 < x < R$).

Calculer en fonction de x et de R l'aire S de la section de la sphère par le plan (Π) .

Calculer une primitive de S et en déduire le volume V du solide intérieur à la sphère et compris entre les deux plans parallèles. Donner la valeur de V pour $x = \frac{R}{2}$.

EXERCICE 3

Représentation plane des trajectoires orbitales d'un satellite.

1. Question préliminaire. - On donne la fonction

$$y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Calculer sa dérivée et utiliser cette dérivée pour étudier les variations et la représentation graphique de y lorsque x varie de 0 à 2π .

2. On donne alors un repère orthonormé $Oxyz$ et le point M de coordonnées

$$x = R \cos v \cos u, \quad y = R \cos v \sin u, \quad z = R \sin v,$$

où R est une longueur donnée et u et v les mesures en radians de deux angles tels que

$$0 < u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

Montrer que, si u et v varient, M décrit une sphère (S) de centre O .

Montrer que v peut être considéré comme l'angle de OM et du plan xOy et u comme l'angle de Ox avec la projection de OM sur le plan xOy .

3. M appartenant toujours à la sphère (S) , on suppose, de plus, que M se déplace dans le plan (Π) dont l'équation est $z = y$.

M décrit donc dans ces conditions un cercle (γ) . Trouver, dans ce cas, en utilisant les formules données à la question précédente, une relation entre une fonction circulaire de u et une fonction circulaire de v .

4. On projette M en H sur Oz et l'on prolonge la demi-droite d'origine H et portant HM jusqu'à ce qu'elle coupe en P le cylindre (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

[On remarquera que ce cylindre est circonscrit à la sphère (S).]

On dira qu'on a projeté M en P sur (C).

Calculer, en fonction de u et de v , les coordonnées x' , y' , z' du point P.

Montrer, en utilisant la relation trouvée à la question 3, qu'il existe deux relations algébriques entre x' , y' , z' .

5. Pour effectuer une représentation plane du lieu de P on considère, dans un plan quelconque, un repère orthonormé $X\Omega Y$ et, dans ce plan, le point I de coordonnées X , Y , tel que l'on ait

$$X = u, \quad Y = z.$$

On posera $R = 1$.

En utilisant la relation trouvée à la question 3 entre u et v , trouver la relation qui existe entre X et Y indépendamment de u et de v . Montrer qu'elle définit une fonction Y de X qui n'est autre que la fonction étudiée à la question 1.