Baccalauréat C Maroc juin 1969

I

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels.

1. Montrer que la relation

$$\left(y \in \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad 3y^2 \in \mathbb{Z}\right)$$

implique la relation $y \in \mathbb{Z}$.

2. Montrer que la relation

$$\left(x \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad y \in \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Z}\right)$$

implique la relation $y \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que la relation

$$(x \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad x \equiv 1 \pmod 2)$$

implique la congruence $x^2 \equiv 1 \pmod 4$.

4. Montrer que la relation

$$(x \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad y \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad x \equiv 1 \pmod 2)$$

implique

$$x^2 - 3y^2 \not\equiv 0 \pmod 4.$$

II

Dans un plan (P) un repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donné.
À tout point M, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe le point M', de coordonnées $(x'\ ;\ y')$:

$$x' = 3x - 2y, \quad y' = 4x - 3y.$$

Déterminer l'ensemble (E) des points M confondus avec leurs images M'.
Quand M n'appartient pas à (E), la droite MM' et (E) ont un point commun m. Comparer mM et mM' ; reconnaître la transformation qui à M associe M'.

III

Partie A

Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f.
   Soit f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   Montrer que

$$f'' = f.$$

2. Montrer que la fonction f est paire, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

   Étudier les variations de la fonction f et construire son graphe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.
On suppose connu le graphe $\left(\gamma_0\right)$ de la fonction

$$x \longmapsto \mathrm{e}^x.$$

1. Soit (γ) la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{x-1}$ et $\left(\gamma'\right)$ la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x-1}$.
   Montrer que (γ) et $\left(\gamma'\right)$ se déduisent de $\left(\gamma_0\right)$ par des transformations ponctuelles simples, que l'on précisera.
   Déterminer les graphes de $\left(\gamma_0\right)$, (γ) et $\left(\gamma'\right)$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
2. Soit P un point de l'axe $x'Ox$ d'abscisse donnée m.
   Déterminer en fonction de m les équations des droites (Δ) et (Δ') respectivement tangentes à (γ) et $\left(\gamma'\right)$ et qui passent par le point P.
   Préciser les coordonnées des points de contact T et T'.
   Comparer les directions de (Δ) et (Δ').
3. Trouver, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points I milieux de TT'.
   Montrer que la droite TT' est tangente à la courbe ensemble des points I.
4. Déduire des résultats précédents une construction géométrique de la tangente en un point donné J de la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C

On considère un mobile dont la trajectoire est la courbe $(\mathcal{C})$ et dont les coordonnées sont données en fonction du temps par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t, \\ y(t) & = & \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \end{array}\right. \qquad t \in [0~;~+\infty[.$$

Soit $M(t)$ le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

1. Déterminer les composantes scalaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ à l'instant t.

Comparer les modules de ces deux vecteurs avec l'ordonnée du point $M(t)$.

2. La trajectoire est supposée orientée de façon que le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ ait une mesure algébrique $v(t)$ positive. Soit $s(t)$ la mesure algébrique de l'arc $\widehat{M(0)M(t)}$ de la courbe $(\mathcal{C})$. On rappelle alors que

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

Soit $S(t)$ l'aire de la surface limitée par $(\mathcal{C})$, les axes de coordonnées et la parallèle menée par $M(t)$ à $\left(y'\mathrm{O}y\right)$.

Évaluer $s(t)$ et $S(t)$ en fonction de t.