

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Mauritanie et Sénégal juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Dans un plan on donne deux points fixes, A et B, et l'on pose $AB = 3a$. Déterminer avec précision l'ensemble des points M du plan, tels que le vecteur $(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})$ soit orthogonal au vecteur $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})$.

EXERCICE 2

Soit la suite de terme général

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

1. Déterminer deux constantes, a et b , telles que

$$\forall n, \quad U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}.$$

2. En déduire une expression simple de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
3. Trouver la limite de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

PROBLÈME

Dans un plan muni d'un repère quelconque xOy , de vecteurs unitaires \vec{i}, \vec{j} , on considère la transformation ponctuelle, T , qui au point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M_1(x_1; y_1)$ défini par les formules

$$T \quad \begin{cases} x_1 &= \frac{2x}{1+x}, \\ y_1 &= \frac{2y}{1+x}. \end{cases}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble, E , des points (x, y) qui n'ont pas de transformé par T . Définir la transformation réciproque, T^{-1} . Déterminer l'ensemble, F , des points $(x_1; y_1)$ qui n'ont pas de transformé par T^{-1} . Déterminer l'ensemble des points doubles de T .
2. (D) étant une droite d'équation $ux + vy + w = 0$, trouver l'équation de sa transformée, (D_1) Montrer que (D) et (D_1) concourent sur la droite (Δ) d'équation $x = 1$, ou sont parallèles à (Δ) .

Comparer les ordonnées à l'origine de (D) et (D_1) .

Montrer que les points O, M et M_1 sont alignés et, en appelant P l'intersection de OM et de (Δ) , montrer que la division (O, M_1, M, P) est harmonique.

Partie B

Dans ce qui suit, on considère l'ensemble (H) d'équation $xy = 1$ et son transformé, (H_1) par T .

1. Donner l'équation de (H_1) sous la forme $y_1 = f(x_1)$.

Étudier les variations de la fonction $y_1 = f(x_1)$ et construire dans le même repère xOy les courbes (H) et (H_1) . Préciser les asymptotes de (H_1) et les points communs à (H) et (H_1) .

2. À tout point M , noté ici $M(\alpha ; \beta)$, situé sur (H) , et à son image, $M_1(\alpha_1 ; \beta_1)$, on associe les vecteurs

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(\alpha)} &= \overrightarrow{OM} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \\ \text{et } \overrightarrow{V_1(\alpha)} &= \overrightarrow{OM_1} = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} \end{aligned}$$

Calculer les composantes scalaires des vecteurs $\overrightarrow{V'(\alpha)}$, $\overrightarrow{V'_1(\alpha)}$, dérivés par rapport à α de \overrightarrow{V} et $\overrightarrow{V_1}$.

Former les équations des tangentes, MT et M_1T_1 , à (H) en M et à (H_1) en M_1 .

Comparer les ordonnées à l'origine de ces tangentes.

Montrer que MT et M_1T_1 se coupent sur la droite (Δ) .