Baccalauréat C Métropole septembre 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
θ désigne un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; +\pi[$.
Pour tout θ on définit le nombre complexe

$$z(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{e}^{\text{i}\theta}\right)^2.$$

1. Calculer $\left(1 + \text{e}^{\text{i}\theta}\right)\text{e}^{-\text{i}\frac{\theta}{2}}$, en déduire que le nombre complexe $\left(1 + \text{e}^{\text{i}\theta}\right)$ a pour argument $\dfrac{\theta}{2}$.

   Calculer le module et l'argument de $z(\theta)$.

   Représenter dans le plan complexe $z(\theta)$.
2. Soit M le point d'affixe $z(\theta)$ et A le point d'affixe 1. On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).

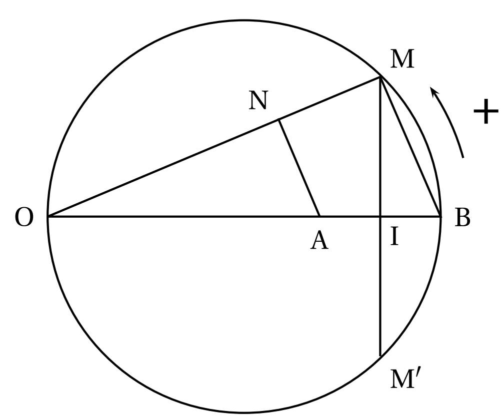
   Quel est l'ensemble des points P quand θ varie dans $]-\pi ; +\pi[$?
3. Calculer la distance PM. On séparera les cas

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \theta \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[.$$

4. Donner une construction géométrique de l'ensemble des points M (construction point par point).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan (P) un cercle de diamètre [OB].
Soit A un point du segment [OB], distinct de O et de B, I le milieu de [AB].
La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle en M et M′ tels qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{MO}}, \overrightarrow{\text{MB}}\right)$ soit $+\dfrac{\pi}{2}$ Soit N la projection orthogonale de A sur (OM).



1. Donner la nature du quadrilatère AMBM′. En déduire que la droite (AM′) est orthogonale à (OM) et que N, A et M′ sont alignés.

2. On appelle S la similitude directe de centre N, telle que $S(\text{M}) = \text{A}$.

Préciser l'angle de cette similitude. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA). En déduire l'image par S du point M′.

3. Montrer que l'image par S de I est le point I′, milieu de [OA]. En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA].

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

a. Étudier les variations de P.

b. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule α, et que α appartient à l'intervalle]1,6 ; 1,7[.

2. Soit D l'ensemble des réels strictement supérieurs à -1.

On considère la fonction numérique f définie sur D par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm).

a. Étudier les variations de f (on utilisera pour cela les résultats du 1.

b. Écrire une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ) dans l'intervalle $]-1\,;\,+1[$.

c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

3. **a.** Déterminer trois réels a, b, c, tels que pour tout x dans l'ensemble de définition de f on ait :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

b. x étant un nombre réel positif, justifier l'existence de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

et la calculer.

c. Calculer $F(1)$ et interpréter ce nombre à l'aide d'une aire.

Partie B

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
On considère la suite numérique $\left(u_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel p de $\mathbb{N}$, par :

$$u_p = \frac{(-1)^p}{(3p+1)(3p+2)},$$

puis la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_n.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel p, on a

$$\int_0^1 t^{3p}(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(3p+1)(3p+2)}.$$

2. **a.** Montrer que

$$S_n = \int_0^1 (1-t)\frac{1-\left(-t^3\right)^{n+1}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

b. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que

$$I - S_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^3}\left[t^{3n}(1-t)\right]\mathrm{d}t.$$

Donner sur $[0\,;\,1]$ un majorant de $\dfrac{t^3}{1+t^3}$ et en déduire, en utilisant le B 1., que :

$$|I - S_n| \leqslant \frac{1}{9n^2}.$$

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est $\dfrac{2}{3}\ln 2$.