

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Métropole septembre 1990 ∞

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note C le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de C d'affixe R .

Étant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On considère la suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ de C définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k .

1.
 - a. Pour tout $k \geq 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .
 - b. En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n .
 - c. Comparer M_n et M_0 .
 - d. Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).
2.
 - a. Prouver que, pour tout $k \geq 0$, $M_k M_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$.
 - b. On note $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$ le périmètre du polygone régulier (M_0, M_1, \dots, M_n) .
Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

EXERCICE 2

5 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ACB tel que (\vec{AC}, \vec{AB}) ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On note Δ la droite orthogonale à (AB) passant par C et I le point de Δ tel que (\vec{AC}, \vec{AI}) ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$.

Enfin, on note s la similitude directe de centre A telle que $s(C) = I$ et s' la similitude directe de centre B telle que $s'(I) = C$.

1.
 - a. Placer les points A, B, C et I sur la figure.
 - b. Prouver que $r = s \circ s'$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - c. Déterminer le centre de cette rotation.
2. À tout point M du plan, distinct des points A, B et C , on associe le point $N = s(M)$ et le point P tel que $s'(P) = M$.
 - a. Déterminer les angles (\vec{AM}, \vec{AN}) et (\vec{BP}, \vec{BM}) .

- b.** On note σ la similitude directe de centre A telle que $\sigma(C) = M$.
 Comparer $\sigma \circ s$ et $s \circ \sigma$.
 En déduire l'image de I par σ , puis déterminer l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.
 En déduire une construction géométrique de N.
 Placer les points M et N sur la figure.
- c.** Construire de même P (on pourra utiliser la similitude directe σ' de centre B telle que $\sigma'(I) = P$).
- 3.** Prouver que $IP = IN$ et que $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

PROBLÈME**4 points****A**

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 4 cm.)

1. Variations de f

- Calculer la dérivée f' de f sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer la limite de $(1+u)e^{-u}$ lorsque u tend vers $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
- Étudier le sens de variation de f .
- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(u) = 1 - (1+u)e^{-u}.$$

- Calculer la dérivée de φ .
- Prouver que, pour tout $u \geq 0$:

$$0 \leq \varphi'(u) \leq u.$$

- En déduire que, pour tout $u \geq 0$

$$0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2} \quad (1)$$

3. Étude de f au voisinage de $+\infty$

a. À l'aide de (1), établir que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}.$$

b. En déduire que \mathcal{C} admet une asymptote Δ en $+\infty$; préciser la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .

4. Étude de la tangente à \mathcal{C} en un point

Soient x un élément de $[0; +\infty[$ et T_x la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse x .

a. Déterminer une équation cartésienne de T_x .

b. Montrer que T_x coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ au point d'abscisse $\frac{x}{1+x+x^2}$.

5. Construction de \mathcal{C}

Construire \mathcal{C} et Δ . On précisera les tangentes à \mathcal{C} aux points d'abscisses $1, \frac{1}{3}$ et 3 .

B

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1$.

1. Convergence de (u_n)

a. Établir que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq x$; résoudre l'équation $g(x) = x$.

b. Prouver que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que (u_n) converge, puis que sa limite a est nulle.

2. Comportement asymptotique de (u_n)

a. Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $g\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Étudier les variations de g sur $[0; 1]$.

c. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n-1} \leq \frac{1}{n}$.

d. Pour tout entier $p \geq 0$, exprimer $\frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}$ en fonction de u_p .

Établir que :

$$1 \leq \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leq 1 + \frac{1}{p+1}.$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$n \leq \frac{1}{u_n} \leq n+1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

e. Pour tout entier $p \geq 2$, comparer $\frac{1}{p}$ et $\int_{p-1}^p \frac{1}{t} dt$.

En déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n.$$

f. Déterminer la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.