Baccalauréat C Métropole septembre 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on donne les points A et B distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.
Soient A$'$ l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$,
B$'$ l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1. Exprimer les affixes z_1' et z_2' des points A$'$ et B$'$ en fonction de z_1 et z_2.
2. Quelle est l'affixe du milieu I de [A$'$B$'$] ?
3. Quelle est l'affixe du point H défini par $\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{AB}}$?
4. Déduire des questions précédentes que la médiane (OI) du triangle OA$'$B$'$ est une hauteur du triangle OAB et que OI $= \dfrac{1}{2}$AB.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan orienté un triangle ABC.
Soit G le barycentre du système $\{(\text{A},~3), (\text{B},~1), (\text{C},~1)\}$, Q le barycentre du système $\{(\text{A},~3), (\text{C},~1)\}$ et R le barycentre du système $\{(\text{A}, 3), (\text{B}, 1)\}$.

1. Démontrer que les droites (BQ) et (CR) passent par G.
2. Soit P le milieu de [BC], démontrer que les points A, P, G sont alignés.
   Exprimer $\overrightarrow{\text{PG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{PA}}$.
3. On suppose B et C fixes et que le point A décrit l'ensemble E des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{\text{MB}},~\overrightarrow{\text{MC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo π.
   Déterminer alors l'ensemble E$'$ décrit par le point G.

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout réel positif x par :

$$f_n(x) = x^n\text{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 3 cm).

Partie 1

1. Étudier les variations de la fonction f_1 et déterminer sa limite en $+\infty$.
   Tracer $\mathscr{C}_1$ en précisant la tangente à l'origine.

2. Pour n entier supérieur ou égal à 2, étudier les variations de la fonction f_n et déterminer sa limite en $+\infty$.

   Tracer $\mathscr{C}_3$ sur une nouvelle feuille, en précisant la tangente à l'origine.

3. On note s_n la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = n$ et $\mathscr{C}'_n$ l'image de $\mathscr{C}_n$ par s_n.

   a. M étant le point du plan de coordonnées $(x~;~y)$, calculer les coordonnées de son image par s_n.

   b. Montrer que $\mathscr{C}'_n$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient : $x \leqslant 2n$ et $y = f_n(2n - x)$.

   c. Tracer $\mathscr{C}'_3$ sur la même feuille que $\mathscr{C}_3$.

   Pour $x \leqslant 2n$, on pose $g_n(x) = f_n(2n - x)$.

   d. En interprétant géométriquement les intégrales, justifier l'égalité :

$$\int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Pour x élément de $[0~;~n]$, on pose $h_n(x) = \ln\left[g_n(x)\right] - \ln\left[f_n(x)\right]$.

   a. De l'étude des variations de h_n, déduire le signe de $h_n(x)$.

   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~n]$ on a : $f_n(x) \leqslant g_n(x)$.

   c. Déduire de ce qui précède l'inégalité : $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 2

Pour tout réel positif x, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que la fonction F_n est croissante sur $[0~;~+\infty[$.

2. À l'aide d'intégrations par parties :

   a. Calculer $F_1(x)$.

   b. Démontrer que, pour tout réel positif x et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x).$$

3. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout réel positif x et tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$F_n(x) = n!\left[1 - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right].$$

4. **a.** Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = n!$.

   b. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul on a : $F_n(x) \leqslant n!$.

Partie 3

1. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$F_n(n)+\int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant n!$$

2. Déduire des résultats des parties 1 et 2 que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$0 \leqslant F_n(n) \leqslant \frac{n!}{2}$$

$$\text{puis}\quad \frac{1}{2}\mathrm{e}^n \leqslant 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!} \leqslant \mathrm{e}^n.$$