

♣ Baccalauréat S Métropole juin 1998 ♣

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, A et B étant deux évènements, $P(A)$ désigne la probabilité de A ; $P(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
$p_i = P(X = i)$	0,1	0,5	0,4

- a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .
2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les évènements suivants :
 C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente »;
 C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent »;
 E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».
 - a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.
 - b. Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
 - c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.
 3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y .

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(1) \frac{z-2}{z-1} = z$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(2) \frac{z-2}{z-1} = i.$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M , A et B les points d'affixes respectives : z , 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B .
 - a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
 - b. Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. a. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i,$$

où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

- b. Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation

$$(3) \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i.$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un angle droit direct; I désigne le milieu de [AB].

A. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à \mathcal{E} .
2. a. Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{E} .
- b. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' , telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les nombres a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

Déterminer le rapport et l'angle de T .

3. Montrer que la similitude T transforme B en I .
4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).
5. Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Problème

10 points

Les tracés des courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I , $f(x) < g(x)$.

PARTIE A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2}.$$

On notera \mathcal{C} la représentation graphique de f et Γ celle de g .

On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$; calculer $h(0)$.
(L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)
2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$(1) \quad \frac{2x}{x+2} < \ln(1+x).$$

3. Construire dans le même repère les courbes \mathcal{C} et Γ et montrer qu'elles admettent en 0 une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes.)

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \mapsto kx$, majorant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0; +\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier le sens de variation de f_1 , définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Étudier la limite de f , en $+\infty[$ et donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul

$$(2) \quad \ln(1+x) \leq x.$$

4. En déduire que si $k \geq 1$ alors : pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.
5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.

Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \frac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k . (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6. En déduire les valeurs de k strictement positives telles que pour tout $x \geq 0$, $f(x) < kx$.

PARTIE C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

(On remarquera éventuellement que : $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.)

En déduire le calcul de $J = \int_0^1 (x - \ln(1+x)) dx$ puis de $K = \int_0^1 \left[\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} \right] dx$.

(Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$.)

Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes \mathcal{C} , Γ et la droite D obtenues dans la partie A.

2. Soit u la fonction définie sur $[0; 1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0, u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

- a. Démontrer que la fonction u est dérivable sur $]0; 1]$.
b. On admet que u est dérivable sur $[0; 1]$ et on pose :

$$L = \int_0^1 u(x) dx.$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties **A** et **B**, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} dx < L < 1.$$

En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.