Baccalauréat S Métropole juin 2000

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(\text{A} / \text{B})$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.

   On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

   Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

   a. On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_1)$.

   b. On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_2/\text{T}_1)$, puis $p\left(\text{T}_2/\overline{\text{T}_1}\right)$. En déduire $p\left(T_2 \cap \text{T}_1\right)$ et $p\left(\text{T}_2 \cap \overline{\text{T}_1}\right)$.

   (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

   c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

   Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_\text{A} = 1$ et B d'affixe $z_\text{B} = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0~;~\pi[$.

On note M le point d'affixe $z = 1 + \text{e}^{2\text{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\text{AB}}~;~\overrightarrow{\text{A}M})$ en fonction de θ.

   En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0~;~\pi[$.
3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A$'$ l'image de A par r.

a. Définir l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ par r.
Placer sur une figure A, B, $(\mathscr{C})$, M, $(\mathscr{C}')$ puis le point M' image de M par r.

b. Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en O et en M'.

d. Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[\text{A}'P]$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{\text{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$.
Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.
Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.
On appelle I le milieu de [BC], J le milieu de [EF] et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).
On note h_{A} l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_{\text{A}}(C)$ puis $h_D(F)$.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}}$ puis de $h_{\text{A}} \circ h_D$.

3. On appelle E' l'image de E par h_{A} et E'' l'image de E' par h_D.
Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}} \circ h_{\text{A}} \circ h_D$.

5. Montrer que le quadrilatère BECE'' est un parallélogramme.

6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
(Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.
Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).
Déterminer et construire le lieu géométrique $(\Delta)''$ du point E''.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

★ On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_1(x) = x\text{e}^{-x^2}$$

et on appelle $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $f_1'(x) = \text{e}^{-x^2} - 2x^2\text{e}^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.
   Déterminer la position de $(\mathscr{C}_1)$ par rapport à (Δ).
5. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et (Δ).

Partie B

★ On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_3(x) = x^3\text{e}^{-x^2}$ et on appelle $(\mathscr{C}_3)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminer les positions relatives de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.
3. Tracer $(\mathscr{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ (on admettra que $(\mathscr{C}_3)$ a la même asymptote que $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$.
4. On appelle (D) la droite d'équation $x = 1$. Soit $\mathscr{A}_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_1)$, les deux axes de coordonnées et la droite (D) et soit $\mathscr{A}_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_3)$ les deux axes de coordonnées et la droite (D).
   a. Calculer $\mathscr{A}_1$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}_3 = -\dfrac{1}{2\text{e}} + \mathscr{A}_1$.

Partie C

★ On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n\text{e}^{-x^2}.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On note α_n, ce maximum.

2. On appelle S_n le point de $(\mathscr{C}_n)$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

Montrer que, pour tout n, $(\mathscr{C}_n)$ passe par S_2. Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.

3. Soit la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left[-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

c'est-à-dire $g(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\left(-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$.

a. Étudier le sens de variation de g.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = g(n)$.

En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.