

♣ Baccalauréat S Métropole juin 2001 ♣

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1 ; 1]$.
On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1} .
2. a. Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}.$$

- b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}.$$

- c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1 ; 1]$.
Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0; 0; 2)$, $(-1; 2; 1)$ et $(-1; 2; 5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.
 - a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1} .
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.
 - b. Calculer le rayon du cercle \mathcal{C} intersection de (E) et (F).

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n , on appelle M_n le point du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure α_n .

1. Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$.
2. On appelle z_n l'affixe de M_n . Montrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
3. a. Montrer, pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes :
 - les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;
 - les points M_n et M_{n+12} sont confondus.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance $M_n M_{n+4}$ vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On appelle z_n l'affixe de M_n .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
Placer les points M_0, M_1, M_2 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a l'égalité

$$z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p . Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.
4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
- b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

PROBLÈME**9 points****Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

★ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1).$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans (O, \vec{u}, \vec{v}) et A le point de \mathcal{C} d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de \mathcal{C} d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{v})$.

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) et représenter la courbe (\mathcal{C}) .

Partie B

★ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z' .

1. **a.** Donner z' en fonction de z .
On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis exprimer x et y en fonction de x' et y' .
- b.** Déterminer les coordonnées des points A' , B' et P' images respectives des points A , B et P par la rotation r .
2. On appelle g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 - a.** Montrer que lorsqu'un point M appartient à (\mathcal{C}) , son image M' par r appartient à (Γ) .
On admet que lorsque le point M décrit (\mathcal{C}) , le point M' décrit (Γ) .
 - b.** Tracer sur le graphique précédent les points A' , B' , P' et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C

★ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$.
Interpréter graphiquement cette intégrale.
2. **a.** Déterminer, en unités d'aire, l'aire \mathcal{A} du domaine plan \mathcal{D} limité par les segments $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et l'arc de courbe (\mathcal{C}) d'extrémités B et A .
b. On pose $I = \int_{\frac{3}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$.
Trouver une relation entre \mathcal{A} et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I .