Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole 16 septembre 2010 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$.

1. Justifier que $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, en distinguant le cas $a < \text{e}$ et le cas $a > \text{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathscr{A}(a)$ en fonction de a.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t+1 \\ y &=& 2t \\ z &=& -t+2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1. **a.** Le point $\mathrm{C}(1\,;3\,;2)$ appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.

b. Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(\mathscr{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$.

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathscr{Q})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.

c. Montrer que $\mathrm{CI} = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $\mathrm{C}M_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} + 2\text{i}$.

   a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

   Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

   b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_\text{B} = -1 + \text{i}\left(\sqrt{3} + 1\right)$.

   Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

   c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

   d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{BI}}$.

   Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_\text{A} = -2,\quad z_\text{B} = -2 + \text{i},\quad z_\text{C} = \text{i},\quad z_\text{D} = 1,\ z_\text{E} = 1 + 3\text{i},\quad z_\text{F} = \frac{5}{2} + 3\text{i},\quad z_\text{G} = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe 3.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

   a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1$.

   b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

   c. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\dfrac{2}{3}\,\text{i}\,\overline{z} + \dfrac{5}{3}\text{i}$.

   a. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

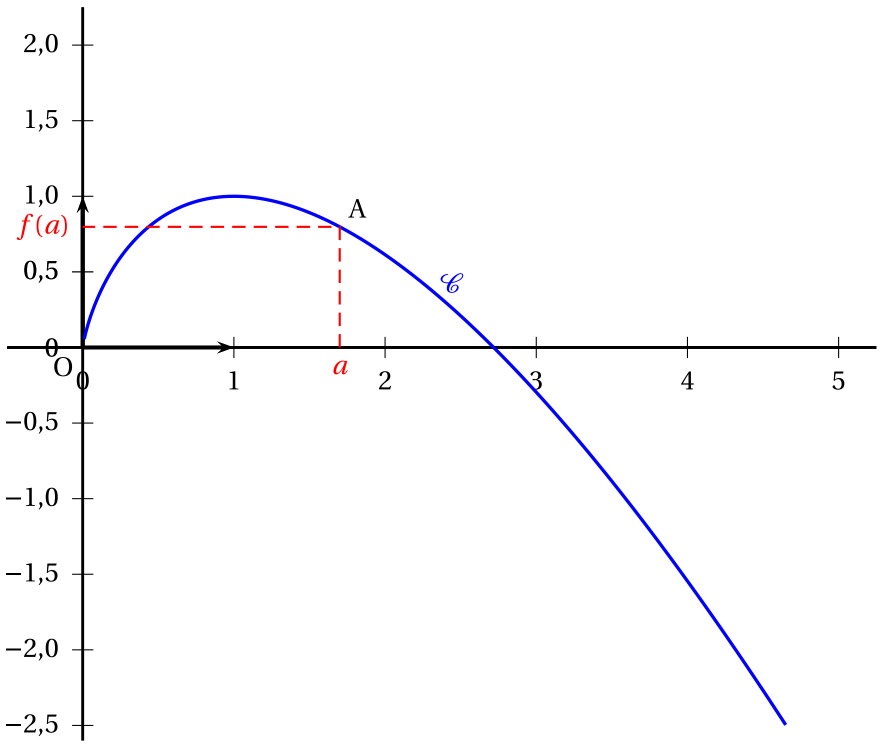
   b. On considère la similitude $g = s' \circ s$.

   Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

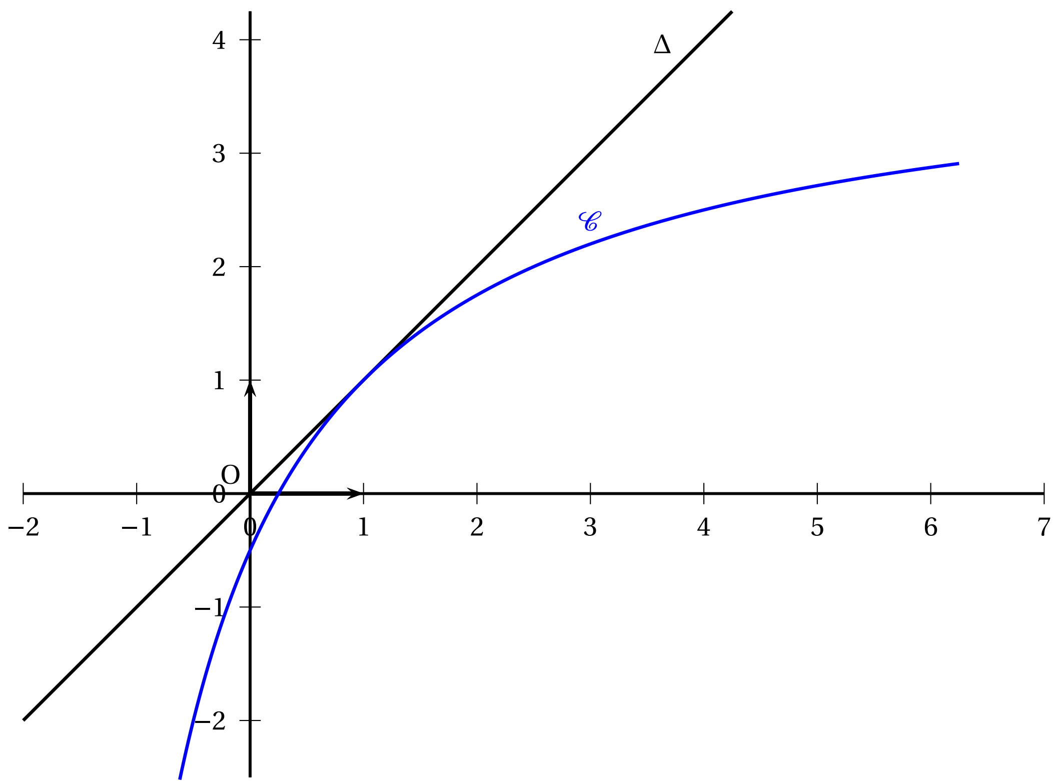
c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité