

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Métropole septembre 2005 ∞

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
4. Tracer la courbe \mathcal{C} .
5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
 - a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $]0; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, de l'équation différentielle :
$$(E') y' + \frac{1}{2}y = 0.$$
 - b. Résoudre l'équation différentielle (E').
 - c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} : z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i. & \mathbf{C} : z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}. \\ \mathbf{B} : z^{14} = 64 - 64i. & \mathbf{D} : z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}. \end{array}$$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4i|$.
A : (E) est la médiatrice du segment [ST];
B : (E) est la droite (ST);
C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3 - 4i$, et de rayon 3;
D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.
3. On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CF}$ est égal à :

$$\mathbf{A} : \sqrt{3} \quad \mathbf{B} : -3 \quad \mathbf{C} : -\sqrt{3} \quad \mathbf{D} : \frac{3}{2}.$$

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.
A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
B : Γ n'admet pas d'asymptote.
C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.
D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.
5. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. La fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f sur \mathbb{R} , est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : f''(x) &= \int_0^x -2te^{-t^2} dt. & \mathbf{C} : f''(x) &= -2xe^{-x^2}. \\ \mathbf{B} : f''(x) &= \int_0^x -2xe^{-x^2} dx. & \mathbf{D} : f''(x) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}.$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k - 7 ; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k - 7 ; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4 \pmod{17}$.

D : $p \equiv 1 \pmod{17}$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

$$\mathbf{A} : z = \frac{b - ia}{1 - i}.$$

$$\mathbf{C} : a - z = i(b - z).$$

$$\mathbf{B} : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a).$$

$$\mathbf{D} : b - z = \frac{\pi}{2}(a - z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.
- A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
 B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].
 C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
 D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan \mathcal{P} passant par le point B(1 ; -2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 1 ; 5)$ et le plan \mathcal{R} d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.
 - a. Démontrer que les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires.
 - b. Démontrer que l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{R} est la droite Δ passant par le point C(-1 ; 4 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$.
 - c. Soit le point A(5 ; -2 ; -1). Calculer la distance du point A au plan \mathcal{P} , puis la distance du point A au plan \mathcal{R} .
 - d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ .
2. a. Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1 + 2t ; 3 - t ; t)$.
 Déterminer en fonction de t la longueur AM_t . On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 - b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur \mathbb{R} ; préciser son minimum.
 - c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

EXERCICE 4**3 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les évènements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant E.

2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.

Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d_{obs}^2 le réel $\sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule

$d^2 = \sum_{i=1}^4 \left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i . Le 9^e décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré?