

## ∞ Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2008 ∞

**EXERCICE 1****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.

La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.

La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient  $E$  et  $F$  les évènements :

$E$  : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;

$F$  : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que  $p(E) = 0,02$  et  $p(F) = 0,17$ .

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

$X$  désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$  et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer  $n$  parties consécutives et indépendantes ( $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)

a. Démontrer que la probabilité  $p_n$  qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que

$$p_n = 1 - (0,9)^n.$$

b. Justifier que la suite de terme général  $p_n$  est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier  $n$  pour laquelle  $p_n > 0,9$  ?

**EXERCICE 2****3 points****Commun à tous les candidats**

On se propose de déterminer toutes les fonctions  $f$  définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : \quad x f'(x) - (2x + 1) f(x) = 8x^2.$$

1. a. Démontrer que si  $f$  est solution de  $(E)$  alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  est solution de l'équation différentielle  $(E') : y' = 2y + 8$ .  
 b. Démontrer que si  $h$  est solution de  $(E')$  alors la fonction  $f$  définie par  $f(x) = xh(x)$  est solution de  $(E)$ .
2. Résoudre  $(E')$  et en déduire toutes les solutions de  $(E)$ ,
3. Existe-t-il une fonction  $f$  solution de l'équation différentielle  $(E)$  dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point  $A(\ln 2 ; 0)$ ? Si oui la préciser.

### EXERCICE 3

4 points

#### Commun à tous les candidats

#### Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct  $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$ . On note I son centre et J le milieu de  $[AI]$ .

1. C est le barycentre des points pondérés  $(A, m)$ ,  $(B, 1)$  et  $(D, 1)$  lorsque :  
 a.  $m = -2$                       b.  $m = 2$                       c.  $m = -1$                       d.  $m = 3$
2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
 b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est  $\frac{2}{3}$ .  
 c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.  
 d. J est l'image de I par la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ .
3. L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$  est :  
 a. la médiatrice de  $[AC]$ .  
 b. le cercle circonscrit au carré ABCD.  
 c. la médiatrice de  $[AI]$ .  
 d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.
4. L'ensemble des points  $M$  du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

est :

- a. la médiatrice de  $[AC]$ .
- b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
- c. la médiatrice de  $[AI]$ .
- d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite numérique  $(J_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt.$$

1. Démontrer que la suite  $(J_n)$  est croissante.
2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite  $(I_n)$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$$I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t} dt.$$

- a. Justifier que, pour tout  $t \geq 1$ , on a  $\sqrt{t+1} \leq t+1$ .
- b. En déduire que  $J_n \leq I_n$ .
- c. Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $(J_n)$  est majorée par un nombre réel (indépendant de  $n$ ).
- d. Que peut-on en conclure pour la suite  $(J_n)$ ?

## EXERCICE 5

5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives  $z_A = 1$ ,  $z_B = 5$  et  $z_I = 3 + i$ .

On note  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre O et de rayon 1,  $(\Delta)$  la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle  $(\mathcal{C})$  en A.

À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , différent de A, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \frac{z-5}{z-1}.$$

Le point  $M'$  est appelé l'image de  $M$ .

**Partie A**

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I' image de I.  
Vérifier que I' appartient à  $(\mathcal{C})$ .
2. a. Justifier que pour tout point  $M$  distinct de A et B, on a :  $OM' = \frac{MB}{MA}$ .  
b. Justifier que pour tout point  $M$  distinct de A et B, on a :  $(\vec{OA}, \vec{OM'}) = (\vec{MA}, \vec{MB})$ .

## Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice,  $M$  désigne un point quelconque de  $(\Delta)$ . On cherche à construire géométriquement son image  $M'$ .

1. Démontrer que  $M'$  appartient à  $(\mathcal{C})$ .
2. On note  $(d)$  la droite symétrique de la droite  $(AM)$  par rapport à la tangente  $(T)$ .  $(d)$  recoupe  $(\mathcal{C})$  en  $N$ .
  - a. Justifier que les triangles  $AMB$  et  $AON$  sont isocèles.  
Après avoir justifié que  $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$  démontrer que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ .
  - b. En déduire une construction de  $M'$ .

## EXERCICE 5

5 points

### Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point  $A$  d'affixe  $z_A = 1$ .

## Partie A

$k$  est un réel strictement positif;  $f$  est la similitude directe de centre  $O$  de rapport  $k$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

On note  $A_0 = A$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_{n+1} = f(A_n)$ .

1.
  - a. Étant donné un point  $M$  d'affixe  $z$ , déterminer en fonction de  $z$  l'affixe  $z'$  du point  $M'$  image de  $M$  par  $f$ .
  - b. Construire les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  dans le cas particulier où  $k$  est égal à  $\frac{1}{2}$ .
2.
  - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$ , l'affixe  $z_n$  du point  $A_n$  est égale à  $k^n e^{\frac{i n \pi}{3}}$ .
  - b. En déduire les valeurs de  $n$  pour lesquelles le point  $A_n$  appartient à la demi droite  $[O; \vec{u})$  et, dans ce cas, déterminer en fonction de  $k$  et de  $n$  l'abscisse de  $A_n$ .

## Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais,  $k$  désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel  $k$  pour laquelle  $k^6$  est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers  $n$  et  $k$  le point  $A_n$  appartient-il à la demi droite  $[O; \vec{u})$  avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008?