

♣ Baccalauréat C Métropole groupe 1¹ juin 1987 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$u = \frac{\sqrt{3} + i}{4}.$$

2. Soit f l'application de \mathbb{C} dans lui-même qui à tout nombre complexe z associe :

$$f(z) = uz + (1 + i)(1 - u).$$

Montrer que f est bijective, et déterminer le complexe w tel que $f(w) = w$.

3. Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixe w, z et $f(z)$ respectivement. On suppose M différent de I .

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$, et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM .

On note F l'application qui à M associe M' .

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques.

4. Soit A_0 le point d'affixe $z_0 = -1 + 2i$.

On définit, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = f(z_n)$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

Calculer, en fonction de n , la distance IA_n .

Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit \mathcal{D} une droite du plan, F un point dont la distance à \mathcal{D} est égale à 2,25 (unité : 1cm) et Δ la droite passant par F et perpendiculaire à \mathcal{D} .

1. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = 0,8$, H étant la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} .

Donner la nature de (E). Préciser les directrices, les foyers et les sommets A et A' situés sur \mathcal{D} . Représenter (E) sur un dessin.

2. Déterminer l'équation cartésienne de (E) dans un repère orthonormal formé par Δ et la médiatrice de $[AA']$.

PROBLÈME**12 POINTS**

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines fonctions du type $x \mapsto x^\alpha e^{-x}$, α étant un réel strictement positif.

A.

On désigne par g_1 et g_2 les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g_2(x) = x^2e^{-x}.$$

1. Étudier les fonctions g_1 et g_2 : on donnera le sens de variation et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Dessiner leurs courbes représentatives (C_1) et (C_2) dans le même repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm); on prendra soin de préciser leur position.

2. Déterminer une équation de la tangente à (C_1) au point M d'abscisse x ; cette tangente coupe l'axe des ordonnées $y'y$ en un point T .

Déterminer, en fonction de x , l'ordonnée de T .

3. Soit t un réel donné, et T le point de $y'y$ tel que $OT = t$. Utiliser la courbe (C_2) pour étudier, suivant la valeur de t , le nombre de tangentes à (C_1) passant par T .

En déduire une construction géométrique de la tangente en M à (C_1) .

B. n étant un entier naturel non nul, f_n est la fonction de $[0; +\infty[$ vers \mathbb{R} , définie par

$$f_n(x) = x^n e^{-x},$$

de courbe représentative (\mathcal{C}_n) dans un repère orthogonal.

On désigne par S_n l'aire de la portion de plan délimitée par (\mathcal{C}_n) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = 1$.

1. En remarquant que, pour x positif, on a $e^{-x} \leq 1$, montrer que $S_n < \frac{1}{n}$.

En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Établir une relation entre S_{n+1} et S_n .

En déduire que $\frac{e^{-1}}{n+1}$ est une valeur approchée de S_n à $\frac{1}{(n+1)^2}$ près.

C. On note f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) &= x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-x}, \text{ si } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On appelle u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

On admet qu'il existe m strictement positif tel que

$$|f'(x)| < m < 1 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \left[\frac{1}{3}; 1 \right].$$

1.
 - a. Montrer que l'image par f de tout élément x de $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ est aussi dans $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.
 - b. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que h s'annule en un point λ unique de $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.
 - c. Rappeler l'inégalité des accroissements finis, et montrer qu'on peut l'appliquer à deux points a et b quelconques de $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.
2.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.
 - b. Montrer que, si u converge, sa limite est λ .
 - c. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leq m |u_n - \lambda|;$$

en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.