

∞ Baccalauréat C Métropole groupe IV¹ juin 1987 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. La lettre x désigne un nombre réel, linéariser $\sin^6 x$.

2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx$.

Démontrer que $I = \frac{15\pi - 44}{1152}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

On donne dans l'espace, quatre points A, B, C, D non coplanaires.
I est le milieu de [AB], J le milieu de [CD], G est le milieu de [IJ].

1. Peut-on avoir $I = J$? Existe-t-il des points de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} ? \quad (\text{Justifier les réponses.})$$

2. Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|.$$

3. Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

4. Peut-on avoir $(P_1) = (P_2)$?

PROBLÈME

12 POINTS

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (Γ_m) d'équation :

$$y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1),$$

où m désigne un nombre réel donné.

1. Vérifier que le point $A(3; 0)$ appartient à la courbe (Γ_m) , quel que soit le réel m .

2. Dans cette question, on suppose m non nul.

a. Montrer que la courbe (Γ_m) est une conique à centre. Montrer que le centre I_m de (Γ_m) a pour couple de coordonnées $\left(\frac{(m-1)}{2m}; 0 \right)$.

Préciser suivant la valeur de m , s'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole.

b. Construire les courbes (Γ_{-1}) et (Γ_1) (figure 1).

1. Nice-Corse - Montpellier - Toulouse

3. Soit $(a ; b)$ un couple de nombres complexes. T est la transformation du plan (P) , qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = az + b$.
- Déterminer a et b pour que le point $A(3 ; 0)$ ait pour image par T le point $A'(3 ; -3)$ et que le point $B(-3 ; 0)$ ait pour image par T le point $B'(-3 ; 3)$.
Préciser alors la nature de T et ses éléments caractéristiques.
 - Justifier que (Γ'_{-1}) transformée de (Γ_{-1}) par T , est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y du point M , puis x et y en fonction de x' et y' .
 - En déduire une équation de (Γ'_1) transformée de (Γ_1) par T . Construire la courbe (Γ'_1) (sur la figure 1).
4. a. On se donne la droite (D) d'équation $y = 5x - 21$. (D') est l'ensemble transformé de (D) par T .
Déterminer une équation de (D') .
- b. U et V (U d'ordonnée positive) sont les points communs à (Γ_1) et (D) , et U' et V' leurs images par T .
Déterminer les couples de coordonnées des points U, V, U' et V' .
- c. Soit S la surface limitée par la courbe (Γ_1) et le segment $[UV]$. Hachurer sur la figure 1 la surface S et son image S' .
Calculer l'aire de S' donnée par :

$$\mathcal{A}(S') = \int_{\frac{3}{2}}^9 \left[-\frac{9}{x} - \left(\frac{2}{3}x - 7 \right) \right] dx.$$

En déduire l'aire de S .

5. Dans cette question, on étudie le cas où $m = 0$.
- Quelle est la nature de la courbe (Γ_0) ?
Faire une deuxième figure, représentant la courbe (Γ_0) (figure 2).
 - On appelle G le barycentre de la famille $\{(A, 2), (b, 1), (M, 1)\}$.
 M décrit (Γ_0) . On appelle (γ_0) la courbe alors décrite par G .
Démontrer que (γ_0) est l'ensemble transformé de (Γ_0) par une homothétie de centre $I_{-1}(1 ; 0)$, dont on précisera le rapport.
On appelle M_1 et M_2 les points de (Γ_0) d'abscisses respectives 4 et 7, dont les ordonnées sont positives.
Construire les barycentres G_1 et G_2 correspondants.
 - On appelle (Γ'_0) l'image par T de (Γ_0) .
On appelle (γ'_0) l'image par T de (γ_0) .
Démontrer que (γ'_0) est l'image de (Γ'_0) par une homothétie que l'on précisera.
Construire les images par T des points M_1, M_2, G_1, G_2 , et les courbes (Γ'_0) et (γ'_0) .

N.B.- L'usage des instruments de calcul est interdit pour cette épreuve