

♣ Baccalauréat C Métropole groupe III¹ 1988 ♣

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que pour tout réel x :

$$f''(x) - f(-x) = x.$$

On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x) - 2x$.

1.
 - a. Calculer à l'aide de f et de ses dérivées f' , f'' les dérivées premières et secondes de h et de g .
 - b. En déduire que les fonctions h et g vérifient les équations différentielles :

$$\begin{cases} g'' = g & (1) \\ h'' = -h & (2) \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des fonctions paires solutions de (1) et l'ensemble des fonctions impaires solutions de (2).
3. Exprimer f en fonction de g et h . Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que pour tout élément x de \mathbb{R} :

$$f(x) = \lambda(e^x + e^{-x}) + \mu \sin x + x.$$

Inversement, une telle fonction est-elle solution du problème posé?

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Dans un plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$.

Soit (A, B, C, D) un parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

- a. Montrer que les droites (AD) et (OC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie s de centre O.

Montrer que O est le centre du parallélogramme ABCD.

- b. Soit Δ l'image de la droite (AB) par la rotation r de centre O, d'angle $(+\frac{\pi}{2})$. Établir que Q est commun aux droites (BC) et Δ .

2. Soient A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1 ; -2)$, $(3 ; 2)$, $(-1 ; 2)$ et $(-3 ; -2)$, dans un plan orienté rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (on donnera les coordonnées des sommets de ce carré).

PROBLÈME**11 POINTS**

I. On munit le plan P d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 5 cm. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x} \cos x.$$

1. Étudier les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle. (On précisera les coefficients directeurs des tangentes aux points de la courbe d'abscisse $x = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$).
2. Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$$

soit une primitive de f .

Calculer l'aire limitée par Γ , les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$, et l'axe des abscisses. Exprimer le résultat en cm^2 .

II. On se propose d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y = x$.

1. Existe-t-il des points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$?
2. Soit φ la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\varphi(x) = e^{-x} \cos x - x.$$

- a. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(\frac{\pi}{2})$.
- b. Étudier les variations de φ .
- c. En déduire qu'il existe un réel unique α de $]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $e^\alpha \cos \alpha = \alpha$ (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$).
- d. On pose $\beta = f(1) = e^{-1} \cos 1$.
En prouvant d'abord que $\alpha < 1$, puis en utilisant le sens de variation de f sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ montrer l'encadrement : .

$$\beta < \alpha < 1.$$

3. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$, et par la relation de récurrence, vérifiée pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier n ,

$$\beta \leq u_n \leq 1.$$

b. On pose $k = |f'(\beta)|$.

En étudiant le signe de f'' sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ prouver que, sur cet intervalle :

$$f'(0) < f'(x) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire que $k < 1$. Prouver que, pour tout réel x de $[\beta; 1]$:

$$|f'(x)| \leq k.$$

c. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|.$$

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers α quand n tend vers $+\infty$.