Baccalauréat C Métropole groupe III[1] juin 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan complexe ($\mathscr{P}$) est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On notera A le point d'affixe $-1+2\text{i}$ et B le point d'affixe $2-\text{i}$.

1. Déterminer et représenter dans le plan ($\mathscr{P}$) l'ensemble (E_1) des points M de ($\mathscr{P}$) d'affixe $z = x+\text{i}y$ tels que :

$$z^2 - (1-2\text{i})^2 = \overline{z}^2 - (1+2\text{i})^2$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Vérifier que A et B appartiennent à (E_1).

2. Déterminer et représenter dans le plan ($\mathscr{P}$) l'ensemble (E_2) des points M de ($\mathscr{P}$) d'affixe $z = x+\text{i}y$ tels que :

$$[z-(1+\text{i})]\left[\overline{z}-(1-\text{i})\right] = 5.$$

Vérifier que A et B appartiennent à (E_2).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que AB = AC. On note I le milieu de [BC] et on donne AI = $4a$ et BC = $2a$, où a est un réel strictement positif; l'unité de longueur dans le plan étant le centimètre, on prendra $a = 2$ pour la figure demandée au 1.
On note G le barycentre du système $\{(\text{A},~2), (\text{B},~1), (\text{C},~1)\}$.

1. En utilisant le point G, déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\left\|2\,\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}}-\overrightarrow{M\text{B}}-\overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et l'ensemble (E).

2. k étant un nombre réel déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = ka^2$.
On discutera suivant les valeurs de k.

PROBLÈME **12 POINTS**

A

On considère dans le plan ($\mathscr{P}$) rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, le cercle ($\Gamma$) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de cordonnées $(1~;~0)$ et A$'$ le point de coordonnées $(-1~;~0)$.

1. Lille, Amiens, Rouen

1. Par tout point H du segment [AA′], distinct de A et de A′, on mène la perpendiculaire (A) à la droite (AA′). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M′. On pose OH = x. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM′.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[-1\,;\,+1]$ par

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

a. Étudier la dérivabilité de f en -1 et $+1$. En déduire les tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) aux points d'abscisses -1 et $+1$.

b. Dresser le tableau de variations de f ; on y précisera $f(0)$.

c. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

3. Montrer que le triangle AMM′ d'aire maximale est équilatéral.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β ($a < \beta$). Déterminer β et donner, en justifiant, une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de α.

B

Cette partie propose l'étude des intégrales I_n définies pour n entier naturel non nul par

$$I_n = \int_0^1 \left(1-x^n\right)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ et, pour n entier naturel non nul :

$$J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. En utilisant des considérations d'aire, prouver que $J_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. a. Calculer J_1

b. En déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.

3. a. Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. En déduire que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

C

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. **a.** Démontrer que la fonction v définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$v(x) = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}$$

a pour fonction dérivée sur $[0\,;\,1[$, v' telle que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$. On admet que le résultat reste vrai sur $[0\,;\,1]$.

b. À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir la fonction v, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a

$$(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}.$$

Vérifier que cette formule reste encore valable pour $n = 2$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout p entier naturel non nul, on a :

$$J_{2p} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{4\times 6\times\cdots\times(2p+2)}\times\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad J_{2p+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2p))}{3\times 5\times\cdots\times(2p+3)}.$$