

∞ Baccalauréat C Groupe III. ∞

Besançon - Dijon - Grenoble - Lyon - Nancy-Metz - Reims -
Strasbourg
juin 1990

EXERCICE 1

5 POINTS

Dans le plan orienté on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I.

I.

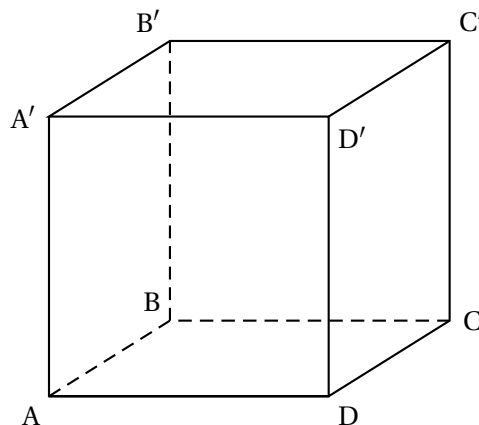
1. Soit $OJO'G$ le carré direct de centre I c'est-à-dire que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}$. Placer ces différents points sur une figure (on prendra $OI = 4$ cm).
2. Prouver que $s \circ r$ est la rotation de centre J d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3. En déduire que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.
Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note,
A et B les images de M par r et s ;
C et D les images de N par r et s .

II. Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment [MN].
Démontrer que ABCD est un carré de centre G. Placer M et N et le carré ABCD sur la figure.

III. Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré. Prouver que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD (on introduira le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré; on comparera alors $r(J')$ et $s(J')$).
Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouver que $r' \circ r = s$. En déduire que sous les hypothèses de la question II, le carré ABCD est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

EXERCICE 2

4 POINTS



$ABCD A' B' C' D'$ est un cube (voir figure). On note,

s_1 la réflexion de plan $(AA'BB')$;

s_2 la réflexion de plan $(BB'CC)$;

s_3 la réflexion de plan $(CCDD')$;

s_4 la réflexion de plan $(DD'AA')$.

I.

1. Montrer que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.
2. Déterminer de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

II.

1. On note s la réflexion de plan $(BB' DD')$.
Déterminer les réflexions s' et s'' telles que, $r' = s \circ s'$ et $r'' = s_4 \circ s_3$.
2. En déduire que $t = r'' \circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{BD}$.

PROBLÈME**11 POINTS****Partie A.**

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

I. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

II.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$

Étudier les variations de φ . Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule, et que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$. (On ne demande pas de construire la courbe représentative de φ .)

2. Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f .

III. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

IV. Construire les courbes représentatives \mathcal{C} de f et Γ de $x \mapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique 4 cm].

Partie B.

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$

À cet effet on introduit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

I. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$. Placer le point de \mathcal{C} d'abscisse α .

II.

1. Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2. Étudier la monotonie de g .
3. Prouver que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$, $g(x)$ appartient aussi à $[3,5; 3,7]$.
4. Établir que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$

$$|g'(x)| \leq |g'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$$

En déduire que

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|.$$

III. Soit (u_n) la suite d'éléments de $[3,5; 3,7]$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 3,5$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^n}$$

En déduire la limite de (u_n) .

2. Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$, où n est un entier naturel non nul.

I. Montrer que, pour tout n , cette équation admet une solution α_n et une seule (en particulier, $\alpha_1 = \alpha$).

II. Comparaison de α_n à e^n .

1. Établir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que $\alpha_n \geq e^n$.
2. Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n} \quad (1)$$

3. En déduire, à l'aide de 1., la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

III. Comparaison de α_n à $e^n + n$.

On écrit α_n sous la forme

$$\alpha_n = e^n(1 + \epsilon_n) \quad \text{où } \epsilon_n \geq 0 \quad (2)$$

1. À l'aide de (1), exprimer $(1 + \epsilon_n) \ln(1 + \epsilon_n)$ en fonction de n .

2. Établir que pour tout $t \geq 0$

$$0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}.$$

3. Dédire de (1) et (2) que pour tout $n \geq 1$

$$\epsilon_n \leq ne^{-n} \leq \epsilon_n + \frac{\epsilon_n^2}{2},$$

puis que

$$0 \leq ne^{-n} - \epsilon_n \leq \frac{n^2}{2}e^{-2n} \quad (3)$$

4. À l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.