

∞ Baccalauréat C Métropole groupe II¹ juin 1988 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat répond au hasard.

- Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.
- Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses.
 - Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à 6 questions.
- Quelle est la probabilité que la candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes?

EXERCICE 2

5 POINTS

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A un point de P d'affixe a non nulle et soit ABC le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O, de rayon OA et tel que (\vec{AB}, \vec{AC}) soit de mesure $\frac{\pi}{3}$.

- Déterminer, en fonction de a , les affixes b et c des points B et C respectivement.
- On désigne par M le point d'affixe $z = a^3$.
Déterminer a pour que M soit le milieu de [BC].
- Dans cette question, le point A décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.
Déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère ABNC soit un losange.

PROBLÈME

10 POINTS

Partie A

Dans cette partie, on étudie la fonction numérique g définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{xe^{2x}}.$$

- Étudier sur \mathbb{R} les variations de la fonction h telle que :

$$h(x) = e^x - x - 1.$$

- En déduire que, pour tout réel α ,

$$e^\alpha > \alpha + 1 \quad (1)$$

1. Caen, Bordeaux, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

2. a. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$e^{-2x} \leq g(x).$$

- b. Justifier l'écriture : $g(x) = e^{-x} \frac{1 - e^{-x}}{x}$.

En déduire à l'aide de l'inégalité (1), que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) \leq e^{-x}.$$

- c. Déduire des questions précédentes que la fonction g est prolongeable par continuité au point $x = 0$.
3. a. Calculer la dérivée g' de g .
- b. En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour tout $x > 0$,

$$g'(x) \leq e^{-2x}.$$

En déduire le sens de variations de la fonction g .

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = g(x), \text{ pour } x > 0. \end{cases}$$

1. a. Justifier l'écriture, pour $x > 0$,

$$g(x) = e^{-\frac{3x}{2}} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}.$$

- b. Soit u la fonction numérique définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$u(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}.$$

Étudier le sens de variation de u .

- c. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout réel t , tel que $0 \leq t \leq a$:

$$2 \leq e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \leq e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}.$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne à la fonction u sur l'intervalle $[0 ; a]$, démontrer que :

$$1 \leq \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{a} \leq \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{2}. \quad (2)$$

- d. En déduire, à l'aide des inégalités (2), que pour tout $x > 0$:

$$e^{-\frac{3x}{2}} \leq g(x) \leq \frac{e^{-x} + e^{-2x}}{2}.$$

En utilisant les inégalités (3), étudier la limite de $\frac{g(x)-1}{x}$ quand x tend vers 0. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 0$.

2. a. Dresser le tableau des variations de la fonction f .
b. Tracer la courbe représentative (\mathcal{C}) de la fonction f dans le plan P muni d'un repère orthonormal (unité de longueur : 5 cm).
3. Soit \mathcal{D} la partie du plan P délimitée par (\mathcal{C}), les axes du repère et la droite D d'équation $x = 1$.

On se propose de déterminer les encadrements de l'aire \mathcal{A} de \mathcal{D} , exprimée en cm^2 .

- a. Donner un encadrement de \mathcal{A} à l'aide de rectangles en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en cinq intervalles de même longueur.
b. En utilisant les inégalités (3), donner un encadrement de \mathcal{A} .