

∞ Baccalauréat C groupe II. juin 1990¹ ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0.$$

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + \cos 2\theta)y'' - (2 \sin 2\theta)y' + 2y = 0.$$

EXERCICE 2

5 POINTS

Soient Γ le cercle de centre O et de rayon R , $[AA']$ un diamètre fixé de Γ , P le milieu de $[OA']$. Une droite distincte de la droite (AA') et de la perpendiculaire en P à (AA') pivote autour de P et coupe Γ en B et C .

1. Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M de $[BC]$ lorsque Δ varie.

2. a. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

La droite $(A'M)$ coupe (AH) en D .

Déterminer l'ensemble E_2 des points D lorsque M décrit E_1 .

b. Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme.

En déduire que D est l'orthocentre du triangle ABC .

3. La droite (AM) coupe (OD) en I . Montrer que $2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$.

Que représente I pour le triangle ABC ?

Déterminer l'ensemble E_3 des points I lorsque M décrit E_1 .

PROBLÈME

10 POINTS

I.

1. Soit g l'application définie sur \mathbb{R}^+ par

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1).$$

Étudier les variations de g , déterminer sa limite en $+\infty$.

En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle

$[1; +\infty[$. Prouver que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

2. On note Γ la courbe représentative de g . (On ne demande pas la construction de Γ .)

a. Écrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 2; déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_0 du point d'intersection de T et de $x'Ox$.

On note v_1 et v_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et excès de x_0 à 10^{-3} près.

Des signes de $g(v_1)$ et $g(v_2)$ déduire un encadrement de α à 10^{-3} près.

Préciser le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R}^+ .

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2 cm.

Soit f l'application définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Montrer que f est dérivable en 0. Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(x+1) \leq x$.

En déduire la position relative de \mathcal{C} et de sa tangente en 0.

Tracer la courbe \mathcal{C} .

III. On note F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Soit r un réel strictement positif fixé. Montrer que $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan.

En déduire la parité de F .

Déterminer les variations de F sur \mathbb{R}^+ .

2. a. Montrer que $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$ en utilisant la position de \mathcal{C} par rapport à sa tangente en 0.

b. Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à 1,

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}.$$

c. Soit x un réel, $x \geq 1$, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

En déduire les limites de $F(x)$ et de $\frac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Donner l'allure de la courbe représentative de F en prenant 0,4 pour valeur approchée de $F(1)$.