

♣ Baccalauréat C Métropole groupe II juin 1989¹ ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

puis la convergence de la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^n u_p, \quad \text{pour tout entier } n.$$

1.
 - a. Montrer que pour tout entier n , u_n est positif.
 - b. Montrer que la suite (S_n) est décroissante.
 - c. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.
2. Montrer que, pour tout entier n de \mathbb{N} ,

$$u_{n+1} = e^{-S_n}.$$

et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Soient A, B et C quatre points distincts de l'espace.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

(On pourra par exemple exprimer $AC^2 - AD^2$ ainsi que $BC^2 - BD^2$ sous forme de produits scalaires.)

2. On considère un tétraèdre ABCD tel que (AB) est perpendiculaire à (CD), et (BC) perpendiculaire à (AD).
Montrer que (BD) est perpendiculaire à (AC).

PROBLÈME

12 POINTS

Le plan affine P euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M. On désigne par $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ les parties réelles et imaginaires de z .

Le plan P privé de l'origine O est noté P^* . Pour tracer les figures on utilisera une unité graphique de 2 cm.

Les parties B et C sont indépendantes.

1. Nancy-Metz, Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Reims, Strasbourg

Partie A

On appelle Γ l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient

$$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0.$$

1. On pose

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

et on considère la transformation g de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point $g(M)$ d'affixe gz .

Montrer que g est une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. On désigne par H l'ensemble des points M de P d'affixe z vérifiant

$$\operatorname{Re}(z^2) = 1.$$

Définir la nature de cet ensemble H et le tracer.

3. Soit M un point de P d'affixe z . Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ si, et seulement si,

$$\operatorname{Re}[(gz)^2] = 1.$$

4. Montrer que H est l'image de Γ par la transformation g .

En déduire la nature de Γ et tracer Γ sur la figure précédente.

Partie B

Soit f la transformation de P^* dans P^* qui à tout point M de P^* d'affixe z fait correspondre le point $f(M)$ d'affixe $\frac{1}{z}$.

On désigne par K l'image de H par la transformation f .

1. Soit M un point de P^* d'affixe z ; on note $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un nombre réel strictement positif. Montrer que M est dans K si, et seulement si,

$$\rho^2 = \cos 2\theta.$$

Vérifier que l'ensemble K est contenu dans le disque de centre O et de rayon 1. Quels sont les points de K situés à la distance 1 de O ?

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tel que $\cos 2\theta$ est strictement positif. En déduire que les coordonnées $(x; y)$ de tout point de K peuvent s'écrire :

$$x = \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \quad y = \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$\text{avec } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}.$$

3. Trouver les coordonnées des points de K d'abscisse positive dont l'ordonnée est la plus grande.

Partie C

Soit M un point de P^* d'affixe z . On note N son symétrique par rapport à l'axe (O, \vec{u}) .

1. Montrer que les points O , N et $f(M)$ sont alignés.
2. En utilisant la deuxième question de la première partie, montrer que si M est dans H l'argument de $z^2 - 1$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$.
3. Vérifier que

$$\arg\left(z - \frac{1}{z}\right) - \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z^2 - 1).$$

4. Dédire des questions précédentes que si M est dans H , alors $f(M)$ est la projection orthogonale de M sur la droite passant par O et N . Utiliser cette propriété pour tracer l'image par f des points de H d'abscisse $\frac{3}{2}$ et 3 .
5. Soit Δ l'image de Γ par la transformation f . Montrer que Δ est aussi l'image de K par la transformation g .