

♣ Baccalauréat C Métropole groupe IV¹ juin 1988 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

θ étant un nombre réel de l'intervalle $]0; 2\pi[$, on considère les deux nombres complexes :

$$z = e^{i\theta}, \text{ (ou encore } z = \cos\theta + i\sin\theta) \text{ et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

et on note $|Z|$ le module de Z .

1. Montrer que $Z = i \cotan \frac{\theta}{2}$ où $\cotan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.
2. Pour quelles valeurs de θ l'argument de Z est-il défini? À quoi est-il alors égal? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de θ .)
3. A quoi est égal $|Z|$?
4. On pose $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |Z| d\theta$. Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer (on pourra mettre $|Z|$ sous la forme $k \frac{u'(\theta)}{u(\theta)}$ où k est un nombre réel et u une fonction de θ .)

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans le plan orienté deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de même rayon r , de centres respectifs O_1 et O_2 et tangents extérieurement en A .

On appelle f la transformation obtenue en effectuant d'abord la translation T de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$ puis la rotation R de centre O_2 et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π), (on donne donc $f = R \circ T$).

1. Dessiner la figure \mathcal{F} formée par \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en prenant $r = 4$ cm.
2. Soit M_1 un point quelconque de \mathcal{C}_1 .
Montrer que $M_2 = f(M_1)$ est un point de \mathcal{C}_2 .
Faire apparaître M_1 et M_2 sur la figure \mathcal{F} .
3. Déterminer l'image de O_1 par f .
4. On pose $A' = f(A)$ et on appelle B le symétrique de A par rapport à O_2 .
Que peut-on dire du triangle $O_2A'B$? Placer le point A' sur la figure \mathcal{F} .
5. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle α et le centre I . Placer I sur la figure \mathcal{F} .
Que peut-on dire du triangle O_1O_2I ? Exprimer AI en fonction de r .

PROBLÈME

12 POINTS

Sans être totalement indépendantes, les trois parties du problème peuvent être abordées dans un ordre quelconque

1. Aix-Marseille - Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

I. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b. Préciser les équations des asymptotes de \mathcal{C} (pour déterminer l'une ces asymptotes, on étudiera $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} \right)$).
 - c. Tracer la courbe \mathcal{C} .
2.
 - a. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de Δ et de \mathcal{C} .
 - b. Pour tout $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de Δ et de \mathcal{C} .
Soit I le milieu du segment [AB].
Montrer que, quand m décrit l'intervalle $] \sqrt{2}; +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$.

3. On construit une suite de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

A_0 est le point de \mathcal{C} d'abscisse 2;

pour tout $n \geq 0$, à partir du point A_n de \mathcal{C} , on détermine B_n , deuxième point d'intersection de \mathcal{C} avec la parallèle à $x'x$ passant par A_n , puis I_n , milieu du segment $[A_n B_n]$;

A_{n+1} est alors le point de \mathcal{C} de même abscisse que I_n . [On admet, et n'est donc pas demandé de le démontrer, que le procédé décrit, ci-dessus définit bien la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Placer sur la figure les points $A_0, B_0, I_0, A_1, B_1, I_1$.

On appelle x_n l'abscisse de A_n .

Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{2x_n} \right) ; x_0 = 2$$

(On utilisera la question 2. b.)

II. Cette deuxième partie est consacrée à l'étude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à la fin de la partie précédente.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, x_n est défini et strictement positif.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2}{2x_n}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $x_n \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ et ensuite que :

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \left(x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$$

4. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq x_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{(2^n)}.$$

(pour démontrer la deuxième inégalité de cette double inégalité, on procèdera par récurrence et l'on pourra poser, pour simplifier, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = x_n - \sqrt{\frac{3}{2}}.)$$

5. En utilisant l'égalité $\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{(2^n)} = e^{(2^n)\ln\left(x_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$, montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

III. Calcul sur machine

En utilisant toute la précision de la calculatrice, présenter dans un tableau les valeurs décimales approchées des six premiers termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et des six premiers termes de la suite $(x_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$.

[La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été définie à la fin de la partie 1 du problème et on a posé $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.]