

∞ Baccalauréat C groupe 4¹ juin 1989 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

Soit I le milieu du segment BC.

On note R_B la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur \overrightarrow{BC} .

On se propose de trouver par *deux méthodes* la nature et les éléments caractéristiques de la transformation :

$$S = R_C \circ T \circ R_B.$$

1^{re} méthode : Utilisation des nombres complexes

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Donner l'écriture complexe des transformations R_B , R_C , T puis S.
2. Caractériser alors S.

2^e méthode : Utilisation des propriétés des transformations

1. Déterminer, sans calcul, la nature de S.
2. Préciser l'image de B par S.
3. Caractériser S.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté on donne un point O et une droite orientée D passant par O. Soit D' la droite orientée se déduisant de D par le quart de tour direct de centre O.

Soit I un point du plan n'appartenant ni à D ni à D', H et H' les projections orthogonales de I respectivement sur D et D'.

On supposera I choisi de telle sorte que $\overline{OH} > 0$ et $\overline{OH'} > 0$.

Les figures demandées seront réalisées en choisissant $OH = 4$ cm et $OH' = 2$ cm.

À chaque point M de D distinct de O on associe le cercle C_M passant par O, I et M.

1. a. Si M est en O on convient que C_O est le cercle tangent en O à D et passant par I. Préciser le centre de C_O et placer ce cercle sur la figure.

1. Orléans - Tours, Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Poitiers, Rennes

b. Montrer qu'il existe un point A de D et un seul tel que le cercle C_A soit tangent à D' . Préciser le centre de C_A et placer ce cercle sur la figure.

Le cercle C_M s'il n'est pas tangent à D' , recoupe cette droite en un point M' autre que O (en particulier C_O recoupe D' en un point O').

Si M est en A , on convient que $A' = O$.

On se propose d'étudier la transformation qui à tout point M de D associe M' .

2. Soit s l'unique similitude directe du plan associant O à O' et A à $A' = O$. On précise que O a pour image O' et que A a pour image O .

a. Montrer que l'angle de s admet pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.

b. Déterminer le centre de cette similitude (on établira qu'il appartient à C_O et C_A).

c. Déterminer l'image de H par s et en déduire le rapport de s .

3. Prouver que pour tout point M de D ,

$$s(M) = M'.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$$

et de construire sa courbe représentative \mathcal{C} , ce qui fait l'objet de la partie A., puis de décrire un procédé d'approximation du nombre a pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie B.

A. Étude de f et construction de \mathcal{C}

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + \ln x - 2$$

a. Étudier le sens de variation de g et ses limites en 0 et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de g .)

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que :

$$1,30 \leq \alpha \leq 1,35.$$

c. Étudier le signe de $g(x)$.

2. Étude de f

a. Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

b. Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3. Construction de la courbe \mathcal{C}

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On choisit pour unité graphique 2 cm.

- a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe \mathcal{C} .
- b. Déterminer le point d'intersection B de \mathcal{C} et Δ ; préciser la position de \mathcal{C} par rapport à Δ .
- c. Construire la courbe \mathcal{C} et la droite Δ , en précisant la tangente en B à \mathcal{C} .

4. Calcul d'une aire

Pour tout nombre réel $t \geq e$, calculer l'aire $\mathcal{A}(t)$ de la portion de plan comprise entre \mathcal{C} et Δ et les droites d'équations $x = e$ et $x = t$.

B. Approximation de α

1. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1,30; 1,35]$ par :

$$h(x) = \sqrt{2 - \ln x}.$$

- b. Justifier la décroissance de h sur I et montrer que pour tout élément x de I , $h(x)$ appartient à I .
- c. Prouver que, pour tout élément x de I ,

$$-\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0.$$

- d. En déduire que pour tout élément x de I ,

$$|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|.$$

2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = h(u_n) \text{ et la condition initiale } u_0 = 1,30.$$

- a. Montrer que pour tout entier n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|.$$

- b. En déduire que pour tout entier n

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- d. Préciser un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$ et donner la valeur de u_{n_0} .