

♣ Baccalauréat C Métropole groupe IV juin 1990 ♣
Aix-Marseille - Corse - Montpellier Nice - Toulouse

EXERCICE 1

4 points

Soit P la plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm. On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et $9i$ et l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z définie par

$$Z = -\frac{3}{4}iz + 9i.$$

1. Démontrer que f admet un point invariant Ω de coordonnées $\left(\frac{108}{25}; \frac{144}{25}\right)$.

Démontrer que f est une similitude plan directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de rapport $\frac{3}{4}$. Quel est son centre?

2. Quelles sont les images par f des points A et O ?

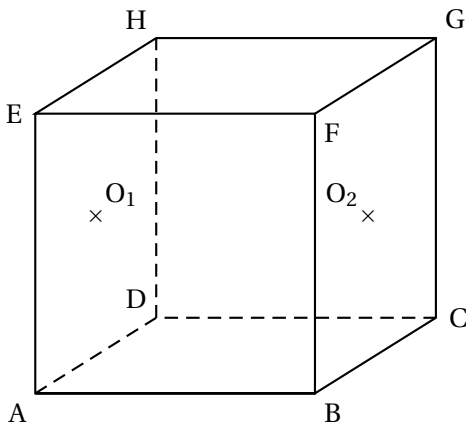
Montrer que Ω est commun aux deux cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$.

Établir que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et montrer que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.

Faire une figure comportant les points Ω , A , B ainsi que les cercles (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

EXERCICE 2

4 points



On considère un cube $ABCDEFGH$, on appelle O_1 et O_2 les centres respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.

Soit N un point du segment $[HF]$ et P un point du segment $[AC]$ définis par $\vec{HN} = k\vec{HF}$ et $\vec{AP} = k\vec{AC}$ où $k \in [0; 1]$.

1. Montrer que N est barycentre du système des points pondérés $\{(H, 1-k), (F, k)\}$ et que P est barycentre du système des points pondérés $\{(A, 1-k), (C, k)\}$

2. Soit d le demi-tour d'axe (O_1O_2) .

Quelles sont les images par d des points A , C et P ?

3. I étant le milieu du segment [NP], montrer que $\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{O_1I}$ puis que $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

En déduire que $\overrightarrow{O_1I} = k\overrightarrow{O_1O_2}$, $k \in [0; 1]$.

Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0; 1]$?

PROBLÈME**4 points**

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}.$$

La représentation graphique de f_n dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est appelée \mathcal{C}_n . On prendra 2 cm pour unité graphique.

A. Étude des variations de f_n , ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit, pour tout entier naturel n non nul, la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^2 - n + n \ln x.$$

Étudier le sens de variation de g_n , préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

2. Établir, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$; étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n .
3. Étudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. Montrer que la droite D_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_n . Étudier la position de \mathcal{C}_n par rapport à D_n lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.

Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1. α_n étant le nombre défini en A 1., montrer que pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1$ et que, pour $n = 2$, $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.
2. En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus, montrer que l'on a $f_2(\alpha_2) \geq -1,24$.
En utilisant le sens de variation de f_2 montrer que $f_2(\alpha_2) \leq -1,10$.
3. Former les tableaux de variations de f_1 et f_2 .
4. Représenter dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les droites D_1 et D_2 , puis les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
5. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre \mathcal{C}_1 et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$, $y = 0$.

C. Étude des positions relatives des courbes C_n .

1. Pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Soit d la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

- a. Étudier les variations de d , préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
 - b. Dédire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - c. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a $f_n(\beta) = \beta$.
3. À l'aide des résultats obtenus dans la question 1. et 2. de cette partie, établir que les courbes \mathcal{C}_n se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ préciser les positions relatives de \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_{n+1} .