

## ♣ Baccalauréat C Métropole groupe I<sup>1</sup> juin 1989 ♣

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On donne les points :

$$A(4; -1) ; B(1 + \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}) ; C(2 - 2\sqrt{2}; 1) ; D(0; -1).$$

Placer ces points en prenant 1,7 comme valeur approchée de  $\sqrt{3}$  et 1,4 comme valeur approchée de  $\sqrt{2}$ .

On désigne par  $a, b, c, d$  les affixes respectives des points A, B, C, D.

1. Montrer que :

$$\frac{a-c}{d-c} = \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) (1+i).$$

On admettra que  $\frac{a-b}{d-b} = \left( \frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) (1+i).$

2. Dédurre de ces résultats les mesures respectives des angles  $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA})$  et  $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA})$ .

Montrer que les points A, B, C, D sont sur un cercle ( $\mathcal{C}$ ).

Construire son centre  $\Omega$  puis dessiner ( $\mathcal{C}$ ).

3. On considère la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Quelle est l'image de D par cette rotation ?

En écrivant l'expression complexe de cette rotation trouver l'abscisse de  $\Omega$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

FGH est un triangle équilatéral de côté de longueur  $\ell$ .

Soit ( $\mathcal{H}$ ) l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d'excentricité 2.

1. Déterminer les sommets S et S' de cette hyperbole (on remarquera que S et S' sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F'.

Calculer, en fonction de  $\ell$ , la distance des sommets  $2a$  et la distance des deux foyers  $2c$ .

2. On choisit le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  où O est le centre de l'hyperbole et  $\vec{i}$  un vecteur unitaire de la demi-droite (OF). Écrire une équation de ( $\mathcal{H}$ ). Donner l'allure de ( $\mathcal{H}$ ).

### PROBLÈME

12 POINTS

Le graphique ci-joint donne les courbes représentatives de quelques solutions de l'équation différentielle :

---

1. Aix-Marseille, Montpellier, Corse, Nice, Toulouse

$$y' - 2y = 8x^2 - 8x$$

dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**A.**

1. Résoudre l'équation différentielle :  $y' - 2y = 0$  (1).
2. Déterminer un polynôme du second degré  $P(x)$  solution de l'équation différentielle :  $y' - 2y = 8x^2 - 8x$  (2).
3. Démontrer que les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2,$$

où  $k$  est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (2).

**B.** Étude de certaines fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2.$$

$\mathcal{C}_k$  désigne la courbe représentative de  $f_k$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On pose

$$k_1 = \frac{4}{e^2} \text{ et } k_2 = \frac{2}{e}.$$

1. Dans cette question  $k$  est un réel strictement positif.  
Chercher  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$  (on pourra mettre  $x^2$  en facteur dans  $f_k(x)$ ) et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$ .
2. Calculer  $f_k(x)$  et  $f''(x)$ ; étudier pour  $k = k_1$  et pour  $k = k_2$ , le signe de  $f''(x)$  et le sens de variation de  $f'(x)$ .
3. **a.** Démontrer que l'équation  $f_{k_1}(x) = 0$  a deux solutions dans  $\mathbb{R}$ , dont une évidente.  
On appelle  $\alpha$  l'autre solution.  
Donner un encadrement décimal d'amplitude  $10^{-3}$  de  $\alpha$ .  
**b.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f'_{k_2}(x) = 0$ .
4. Déterminer le sens de variation respectivement de  $f_{k_1}$  et de  $f_{k_2}$  (on ne demande pas ici le calcul de  $f_{k_1}(\alpha)$ ). Donner les tableaux de variation de  $f_{k_1}$  et de  $f_{k_2}$ .  
Indiquer, sur le graphique joint, les courbes  $\mathcal{C}_0$  (correspondant à  $k = 0$ );  $\mathcal{C}_{k_1}$ ;  $\mathcal{C}_{k_2}$ .
5. Calculer la valeur moyenne de  $f_k$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

**C.** Étude des points de  $\mathcal{C}_k$  à tangente parallèle à  $(x'x)$ .

1. On s'intéresse aux points, lorsqu'ils existent, des courbes  $\mathcal{C}_k$  en lesquels la tangente à  $\mathcal{C}_k$  est parallèle à  $(x'x)$ .  
Montrer que ces points appartiennent à la parabole (P) d'équation  $y = -4x^2 + 4x$ .  
Tracer (P) sur le graphique joint.
2. Dédire de l'encadrement de  $\alpha$ , obtenu en B. 3., un encadrement de  $f_{k_1}(\alpha)$ . Donner une valeur approchée de  $f_{k_1}(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près.

