

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Métropole groupe 2<sup>1</sup> juin 1993 ☞

EXERCICE 1

4 points

Enseignement obligatoire

Une unité de longueur a été choisie. On demande de faire une figure.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation :

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}.$$

1. Démontrer que D est le barycentre du système :

$$\{(A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3)\}.$$

En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2. Démontrer que  $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$ .

3. Calculer :  $DA^2$  et  $DB^2$ .

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

EXERCICE 2

4 points

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes et deux boules jaunes.

1. On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules vertes tirées.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance.

2. On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne.

On note A, B, C, D les évènements suivants :

A : aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules.

B : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.

C : deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.

D : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules.

- a. Calculer :

$P(D/A)$  (Probabilité conditionnelle de D sachant que A est réalisé) ;

$P(D/B)$  (Probabilité conditionnelle de D sachant que B est réalisé) ;

$P(D/C)$  (Probabilité conditionnelle de D sachant que C est réalisé).

- b. En déduire les probabilités des évènements  $D \cap A$ ,  $D \cap B$  et  $D \cap C$ .

- c. Calculer la probabilité de l'évènement D.

---

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

**PROBLÈME****11 points**

La partie C est indépendante de la partie B du problème

**Partie A**

1. Étudier sur l'intervalle  $0$  le sens de variation de la fonction  $h_1$  définie par

$$h_1(x) = x - \ln x.$$

Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  on a

$$h_1(x) > 0.$$

On définit alors sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $f_1$  par

$$f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}.$$

2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f_1$ .  
Déterminer les limites de  $f_1$  aux bornes de l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
Dresser le tableau de variations.
3. On considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x) \end{cases} \text{ pour } x \in ]0; +\infty[.$$

Montrer que  $\varphi_1$  prolonge  $f_1$  par continuité.

Étudier la dérivabilité de  $\varphi_1$  en  $0$ .

**Partie B.**

Dans cette partie,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à  $2$ .

1. Étudier sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  le sens de variation de la fonction  $h_n$  définie par

$$h_n(x) = x^n - \ln x.$$

En déduire que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  on a :  $h_n(x) > 0$ .

On définit alors sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $f_n$  par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}.$$

2. On définit sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction  $g_n$  par

$$g_n(x) = 1 + (1 - n)x^n - \ln x.$$

Montrer que  $g_n$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

En déduire l'existence d'un réel unique  $a_n$  tel que :  $g_n(a_n) = 0$ .

Comparer  $a_n$  et  $1$ . Quelle est la valeur de  $a_2$ ?

3. a. Démontrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on a

$$f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}.$$

En déduire le sens de variation de  $f_n$ .

- b. Préciser les limites de  $f_n$  aux bornes de  $]0; +\infty[$  et dresser le tableau des variations de  $f_n$ .
4. a. En vous aidant de la question 3. de la partie A., montrer que  $f_n$  admet un prolongement par continuité  $\varphi_n$  dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
- b. Tracer la représentation graphique  $\mathcal{C}_2$  de  $\varphi_2$  dans un repère orthonormé (unité : 4 cm).

### Partie C

Calcul approché de l'intégrale  $\int_1^3 f_1(x) dx$  par la méthode des rectangles.

1. En utilisant la question A., déterminer lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $[1; 3]$ , un encadrement de  $x - \ln x$ .  
En déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 3]$ , on a

$$|f_1'(x)| \leq 1. \quad (1)$$

2. On considère deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $1 \leq \alpha < \beta \leq 1$  et on pose

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\alpha) dx.$$

- a. En utilisant la relation (1) et l'inégalité des accroissements finis, démontrer, que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[\alpha; \beta]$ , on a

$$\alpha - x \leq f_1(x) - f_1(\alpha) \leq x - \alpha.$$

- b. En déduire que

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\alpha - x) dx \leq A - J \leq \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx.$$

- c. Montrer que

$$|A - J| \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2.$$

3. On partage l'intervalle  $[1; 3]$  en  $n$  intervalles de même longueur en utilisant les réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tels que

$$1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 3.$$

On a donc

$$x_{k+1} - x_k = \frac{2}{n} \quad \text{pour } k \text{ appartenant à } \{0; 1; \dots; n\}.$$

On pose

$$A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x) dx \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k) dx.$$

Démontrer que

$$\left| \int_1^3 f_1(x) dx - (J_0 + J_1 + \dots + J_{n-1}) \right| \leq \frac{2}{n}.$$

En déduire une valeur approchée de  $\int_1^3 f_1(x) dx$  à  $10^{-1}$  près.

On légitimera le choix de  $n$ .