

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Métropole juin 1963

EXERCICE 1

Trouver les nombres complexes $z = x + iy$ tels que

$$z^2 = 7 - 24i.$$

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle (O) de centre O et de rayon R.

1. On appelle (C) tout cercle ayant comme diamètre une corde PQ du cercle (O); on appelle C le centre d'un tel cercle, et ρ son rayon.
Montrer que (C) est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre C, par rapport au cercle (O) et $-\rho^2$.
2. On suppose dans la suite du problème que le centre C appartient à $x'Ox$ et l'on pose $\overline{OC} = \lambda$.
 - a. Former l'équation qui détermine λ quand (C) passe par un point donné, S, de coordonnées x , y .
Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse (E), qu'on obtiendra par son équation et dont on précisera les sommets et les foyers.
Dans quelle région, délimitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions?
 - b. On se place dans le cas où le problème admet deux solutions, (C_1) et (C_2) , d'abscisses λ_1 et λ_2 , et l'on demande que les cercles (C_1) et (C_2) soient orthogonaux.
Former une équation des points S correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.
3. Parmi les cercles (C) dont le centre C est sur $x'Ox$, on se borne désormais à ceux, en outre, qui coupent $y'Oy$.
 - a. Préciser l'ensemble des centres C de ces cercles.
 - b. Soient I et J les points où (C) coupe $y'Oy$, U et V les symétriques de I et J par rapport au diamètre PQ, U' et V' , les points où IU et JV coupent respectivement le cercle (O); montrer que \overline{IU} et $\overline{IU'}$ gardent un rapport constant; reconnaître l'ensemble des points U et V.
 - c. Montrer que les tangentes en U à (C) et en U' à (O) se coupent en un point de $y'Oy$; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles (C) de cette question 3?