

∞ **Baccalauréat Métropole septembre 1964** ∞  
**mathématiques élémentaires**

**EXERCICE 1**

En utilisant la théorie des congruences, trouver la forme générale des nombres entiers positifs  $n$  tels que l'entier  $n^2 + n + 1$  soit multiple de 13.

**EXERCICE 2**

Dans un plan rapporté au repère orthonormé  $x'Ox, y'Oy$ , on donne un cercle  $(\Gamma)$ , dont le centre est  $O$  et le rayon  $R$ .

Un point  $M$  du cercle est repéré par l'angle de demi-droites

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \varphi, \quad \text{modulo } 2\pi.$$

Une direction de droite  $D$  est repérée par l'angle de droites

$$(x'Ox, D) = \alpha, \quad \text{modulo } \pi, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

On mène par  $M$  la parallèle à  $D$ , qui coupe l'axe  $x'Ox$  en  $A$ , ainsi que la perpendiculaire à  $D$ , qui coupe l'axe  $y'Oy$  en  $B$ .

1. Calculer l'abscisse de  $A$ , l'ordonnée de  $B$ , la distance  $AB$  et les coordonnées du point  $N$ , symétrique de  $M$  par rapport au milieu,  $I$ , de  $AB$ .
2. On suppose  $\alpha$  fixe,  $\varphi$  seul variable.
  - a. Déterminer l'ensemble des points  $N$  et l'enveloppe de la droite  $MN$ .
  - b. Soit  $C$  le point de  $AB$  défini par  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -2$ ; déterminer l'ensemble des points  $C$ ; dessiner cet ensemble pour  $R = 3$  cm et  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .
3. On suppose  $\alpha$  et  $\varphi$  variables ensemble.
  - a. Quelle relation nécessaire et suffisante, liant  $\alpha$  et  $\varphi$ , exprime que  $A$  reste fixe? On notera  $\overline{OA} = kR$ ,  $k$  étant un nombre réel donné. Déterminer alors l'enveloppe de la droite  $MB$ ; dessiner cette enveloppe, seulement pour  $R = 3$  cm et  $k = -2$ .
  - b. Dédire de ce qui précède une résolution géométrique du système d'équations trigonométriques

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \varphi) = k \sin \alpha, \\ \cos(\alpha - \varphi) = k' \cos \alpha, \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\varphi$  sont deux inconnues,  $0 < \alpha < \pi$ , et  $k$  et  $k'$  deux nombres relatifs donnés; discuter.

**N. B.** - Pour chacune des recherches proposées, le candidat pourra, à son gré, emprunter ses méthodes à la géométrie pure ou à la géométrie analytique.