Baccalauréat mathématiques élémentaires
Métropole juin 1964

EXERCICE 1

1. Simplifier l'expression

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x},\quad x \text{ réel.}$$

2. Donner les intervalles de définition de la fonction y telle que

$$y=\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$

3. Cette fonction peut-elle prendre la valeur 0, la valeur 1 ?

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et, sur $x'\text{O}x$, deux points fixes A et B :

$$\overline{\text{OA}}=a,\quad \overline{\text{OB}}=-a,\quad a>0.$$

Deux points M et P varient sur $x'\text{O}x$, liés par la relation $\overline{\text{AM}}\cdot\overline{\text{BP}}=-4a^2$. On pose

$$\overline{\text{AM}}=x,\quad \overline{\text{MP}}=z.$$

1. Exprimer z au moyen de a et x ; étudier la variation de z, la variable indépendante étant x ; construire son graphe.

En déduire, sans calcul, le nombre des points M tels que la distance MP soit égale à d, suivant la valeur du nombre arithmétique donné d.

2. Sur la demi-droite Oy, on envisage le point fixe C, $\overline{\text{OC}}=b>0$.

Évaluer, au moyen de a, b, x, les pentes des droites CM et CP, puis la tangente de l'angle de droites

$$(\text{CM, CP})=\varphi+k\pi,\quad -\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$$

Montrer qu'il existe un point C, et un seul, pour lequel $\tan\varphi$ est indépendant de x ; quel est alors cet angle φ ?

3. On suppose le triangle ABC équilatéral ; on appelle (Ω) son cercle circonscrit, de centre ω.

Les droites CM et CP recoupent respectivement le cercle (Ω) en deux points, M$'$ et P$'$; déterminer l'enveloppe (E) de la droite M$'$P$'$ quand M décrit $x'\text{O}x$.

On fait l'inversion de pôle C qui échange (Ω) et $x'\text{O}x$; déterminer l'inverse de (E) et l'inverse du cercle (Γ) circonscrit au triangle CMP ; en déduire le lieu du centre de (Γ).

N. B. - Toutes les figures seront faites avec précision, en prenant a = 2 cm.