

∞ Baccalauréat C Metz–Nancy juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Trouver les nombres complexes z tels que

$$z^2 + (1 + i)z + i = 0.$$

2. Dédurre du 1 les solutions dans \mathbb{C} des trois équations suivantes :

- a. $z^2 + (1 - i)z - i = 0$;
- b. $1 + (1 + i)z + iz^2 = 0$;
- c. $z^4 + (1 + i)z^2 + i = 0$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, et soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E .

On désigne par P le plan affine de E d'équation

$$x + y + z = 3,$$

et par D la droite affine passant par le point A de coordonnées $(0; 3; 0)$ et dirigée par $\vec{j} - \vec{k}$.

- 1. Montrer que D est située dans P .
- 2. Montrer qu'il existe un unique plan affine P_1 tel que la symétrie s_D orthogonale d'axe D soit la composée de la symétrie s_P orthogonale par rapport à P par la symétrie s_{P_1} orthogonale par rapport à P_1 .
Donner une équation cartésienne de P_1 .
- 3. Soit P_2 le plan parallèle à P_1 passant par O .
 - a. Donner une équation cartésienne de P_2 .
 - b. Déterminer les coordonnées de l'image de A par la projection orthogonale sur P_2 .
 - c. Déterminer sans nouveaux calculs $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ où l'on désigne par s_{P_2} la symétrie par rapport à P_2 .

PROBLÈME

4 POINTS

Partie A

Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = x - 1 - \log x,$$

où la notation $\log x$ désigne le logarithme népérien de x .

1. Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé Oxy , en précisant notamment les branches infinies.
2. Soit h un nombre réel donné tel que $0 < h \leq 1$.
 - a. Calculer l'aire $\mathcal{A}(h)$ du domaine D_h formé des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient les inégalités

$$h \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

- b. Calculer la limite de $\mathcal{A}(h)$ quand $h > 0$ tend vers 0.
3. De l'étude de f , déduire que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité

$$\log x \leq x - 1. \quad (1)$$

Partie B

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On donne n nombres réels strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n et on pose

$$\begin{cases} u &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n); \\ v &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}; \\ \frac{n}{w} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

Les nombres u, v et w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres a_1, a_2, \dots, a_n .

1. a. En appliquant l'inégalité (1) successivement pour

$$x = \frac{a_1}{u}, x = \frac{a_2}{u}, \dots, x = \frac{a_n}{u}$$

et en combinant les n inégalités obtenues, montrer que

$$v \leq u. \quad (2)$$

- b. Dans quel cas a-t-on $v = u$?
2. a. En remplaçant dans (2) les n nombres a_1, a_2, \dots, a_n par leurs inverses, prouver que

$$w \leq v. \quad (3)$$

- b. Dans quel cas a-t-on $w = v$?

N.B. - les parties C et D ci-après sont indépendantes.

Partie C

Soit x un nombre réel supérieur à zéro. On prend $n = 2$, $a_1 = 1$ et $a_2 = x$.
Dans ce cas les inégalités (2) et (3) donnent

$$\frac{2x}{1+x} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}.$$

On se propose prendre comme valeur approchée de \sqrt{x} la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\frac{2x}{1+x}$ et $\frac{1+x}{2}$.

1. Pour étudier la précision de cette approximation, tracer la courbe représentative de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{4(x+1)} - \sqrt{x},$$

pour x réel supérieur à zéro.

N.B. - Pour discuter du signe de la dérivée de g , on pourra poser $\sqrt{x} = 1 + t$ et constater que $g(x)$ passe par un minimum pour $x = 1$.

2. En déduire que, pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, on a

$$0 \leq m(x) - \sqrt{x} \leq \frac{3}{1000}.$$

Partie D

1. En appliquant l'inégalité (2), montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

2. a. Par des considérations d'aires, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

- b. En déduire que, pour tout entier $n > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{n}{1 + \log n} \leq \sqrt[n]{n!}.$$