

☞ Baccalauréat C Mexico juin 1968 ☞

Exercice 1

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan complexe définie par

$$z' = (1 - i)z + 4i.$$

Exercice 2

En étudiant les variations de la fonction définie par

$$y(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-2x}$$

(dont on ne construira pas le graphe), montrer que, dans l'ensemble des nombres réels positifs, l'équation

$$(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0$$

admet une racine réelle et une seule.

Exercice 3

À un couple ordonné de vecteurs \vec{V}, \vec{V}' du plan on associe le vecteur \vec{V}_1 défini par

$$\left(\vec{V}, \vec{V}_1\right) = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad |\vec{V}_1| = |\vec{V}|.$$

Le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}'$ sera nommé *produit aréolaire* des vecteurs \vec{V} et \vec{V}' et noté $\vec{V} \Delta \vec{V}'$.

1. Montrer que $\vec{V} \Delta \vec{V}' = -\vec{V}' \Delta \vec{V}$.

Soit $\vec{AB} = \vec{V}$ et $\vec{AC} = \vec{V}'$; montrer que $|\vec{V} \Delta \vec{V}'|$ est égal au double de l'aire du triangle ABC et que $\vec{V} \Delta \vec{V}'$ est positif ou négatif, suivant que le triangle orienté ABC a le sens positif ou le sens négatif [c'est-à-dire suivant le signe de la détermination principale de (\vec{AB}, \vec{AC})].

On appellera aire algébrique du triangle \vec{ABC} et l'on désignera par \overline{ABC} la moitié de ce produit aréolaire :

$$\overline{ABC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \Delta \vec{AC}.$$

2. Montrer que le produit aréolaire est distributif par rapport à l'addition des vecteurs coplanaires. En déduire que, si

$$\vec{AR} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AS} = \vec{AD} + \vec{AE},$$

on a

$$\overline{ARS} = \overline{ABD} + \overline{ABE} + \overline{ACD} + \overline{ACE}.$$

3. Étant donné un triangle ABC et un point M quelconque du plan, on désigne par A' , B' , C' les milieux respectifs de BC, CA, AB, par α , β , γ les projections orthogonales de M respectivement sur BC, CA, AB, par A'' , B'' , C'' les symétriques de M par rapport aux médiatrices respectives de BC, CA, AB et par O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Démontrer que les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''})$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB''})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC''})$ ont la même bissectrice (on pourra montrer que les triangles OAB'' et OBA'' sont directement égaux).

En déduire que le triangle $A''B''C''$ est l'image de ABC par le produit d'une homothétie et d'une symétrie axiale.

4. Déduire des questions précédentes que

$$(1) \quad \overline{A''B''C''} = -\frac{OM^2}{R^2} \overline{ABC}.$$

Soit I, J et K les milieux respectifs de MA'' , MB'' , MC'' . Montrer que

$$(2) \quad \overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{A'B'C'} + \overline{IJK}.$$

(On pourra, pour cela, utiliser la relation $\overline{M\alpha} = \overline{MA'} - \overline{MI}$ et les résultats des questions 1 et 2.)

Montrer enfin que

$$(3) \quad \overline{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OM^2}{R^2} \right) \overline{ABC}.$$

et en déduire l'ensemble des points M pour lesquels α , β et γ sont alignés.

NOTA - On peut traiter la question 3 avant les questions 1 et 2.