∽ Baccalauréat C Mexico juin 1971 ∽

EXERCICE 1

Résoudre l'équation suivante dans le corps des nombres complexes :

$$(z-1)^5 = (z+1)^5.$$

(Pour cela, on remarquera que $z = 1$ n'est pas solution de l'équation proposée et l'on posera

$$Z = \frac{z+1}{z-1}\,;$$

on déterminera d'abord les valeurs de Z.)

EXERCICE 2

Montrer que le nombre $17^{4n+1} + 3\,.\,9^{2n}$ est divisible par 5 pour tout n entier.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $(x'\text{O}x,\ y'\text{O}y)$. On appelle A le point de coordonnées $(-1\,;\,0)$ et B le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$.

Partie A

1. **a.** Étudier la fonction

$$x \longmapsto y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Tracer sa courbe représentative (C).

b. En déduire l'ensemble (S) des points $(x\,;\,y)$ vérifiant la relation

$$y^2 = x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

2. Reconnaître et tracer la courbe (H) d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x = 0.$$

Préciser ses éléments.

3. Soit $\mathcal{J}$ l'inversion de pôle O et de puissance 2.

a. Établir les formules donnant les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point, M', inverse de M, en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ de M.

b. Quelle est l'équation de la courbe (H') transformée dans l'inversion $\mathcal{J}$ de la courbe (H) privée de O ?

Comparer les courbes (H') et (S).

Partie B

On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de composantes $(\cos\theta\ ;\ \sin\theta)$, où θ est une valeur de l'intervalle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Le point A et le vecteur $\overrightarrow{u}$ définissent une droite (D).

1. Donner une représentation paramétrique de (D).
2. Démontrer que (S) et (D) ont, en plus du point A, deux points communs P' et P'' (distincts ou confondus).
   Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AP}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}''}$.
3. En déduire que (S) est invariante dans une inversion $\mathscr{J}$ à préciser, et que le cercle de diamètre $\mathrm{P}'\mathrm{P}''$ appartient à un faisceau linéaire de cercles à préciser.
4. Soit $\mathscr{F}$ le faisceau linéaire des cercles tangents en O à $x'\mathrm{O}x$.
   a. Écrire l'équation d'un cercle quelconque (Γ) du faisceau $\mathscr{F}$ (on appellera ω son centre).
   b. (Γ) et la droite $(\mathrm{A}\omega)$ ont deux points communs, P' et P''. Quel est l'ensemble des points P' et P'' quand le cercle (Γ) varie dans le faisceau $\mathscr{F}$?