

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Mexico juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation

$$4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0,$$

e étant la base des logarithmes népériens et x l'inconnue.

EXERCICE 2

1. Déterminer les entiers naturels, α et β , ayant 11 pour PGCD et 10 164 pour produit.
2. Résoudre, dans \mathbb{Z} , l'équation

$$77x - 132y = 44.$$

On cherchera d'abord une solution particulière, puis on déterminera tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$. On considère la famille des courbes d'équation

$$4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0,$$

où m est un paramètre réel et a une longueur donnée ($a > 0$).

1. Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes correspondantes.
2. Dans cette partie seulement, on choisit $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

On désigne par (C) la courbe obtenue pour $m = -4$.

- a. Montrer que (C) est une conique, dont on déterminera le centre, ω , les foyers, les sommets et éventuellement les asymptotes. Calculer son excentricité. Tracer la courbe (C) .
- b. Calculer la dérivée de la fonction g définie par

$$g(t) = t\sqrt{t^2 + 1} + \text{Log} \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right),$$

où Log est le symbole de la fonction logarithme népérien.

- c. Écrire l'équation de la courbe (C) dans le repère $(\omega; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $X'\omega X$ et $Y'\omega Y$. Mettre cette équation sous la forme $Y^2 = f(X)$. Calculer l'aire du domaine plan borné limité par la courbe (C) , l'axe $y'Oy$ et l'axe $Y'\omega Y$.

3. Le paramètre a étant de nouveau quelconque, on désigne par (E) la courbe obtenue pour $m = 3$.
- Montrer que (E) est une conique. Préciser le centre, les foyers et les sommets de (E) . Calculer son excentricité e . Tracer (E) .
 - M étant un point de (E) , calculer, en fonction de a et de l'abscisse x de M , l'expression rationnelle de la longueur OM .
On note angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. Calculer la longueur OM , en fonction de a et de e .
 - À chaque point M de (E) on associe son affixe z .
Donner l'expression de z , en fonction de a et de e uniquement.
 - Soit z' et z'' les affixes des points M' et M'' de (E) d'arguments respectifs α et $\alpha + \pi$.
 - Calculer, en fonction de a et de α , le nombre complexe $z' - z''$. En déduire la longueur $M'M''$.
 - On considère le point P d'affixe Z définie par

$$\frac{2}{Z} = \frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}.$$

Calculer Z en fonction de a et de α .

En déduire l'ensemble des points P quand α varie.