

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C juin 1975 Mexico ☞

EXERCICE 1

On donne l'application f du corps des nombres complexes dans lui-même :

$$z \mapsto f(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + 5(i-2)z + 3(7+i).$$

Déterminer l'ensemble E des nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$ sachant qu'un nombre réel est élément de E .

EXERCICE 2

On considère la fonction f_a qui à tout x fait correspondre

$$f_a(x) = x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Préciser le domaine de définition de f_a suivant les valeurs de a .
2. On considère maintenant a positif.
Étudier les variations de la fonction f_a . Tracer la courbe représentative de f_2 en axes orthonormés.
Préciser les tangentes aux points d'ordonnée nulle.
3. Dédire de l'étude précédente la courbe (C) correspondant à l'équation :

$$y^2(a+x) = x^2(a-x)$$

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions numériques, d'une variable réelle, muni de l'addition des fonctions numériques, et de la multiplication par les nombres réels, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Soit m un réel supérieur à zéro fixé. On considère alors l'ensemble E , des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par :

$$f(x) = ae^{mx} + be^{-mx} + c, \quad (\text{où } a, b, c \text{ décrivent } \mathbb{R})$$

Partie A

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.
On démontrera que si l'on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies pour tout x réel par :

$$f_1(x) = e^{mx}, \quad f_2(x) = e^{-mx}, \quad f_3(x) = 1$$

la partie $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ constitue une base de E .

2. a. Soit f un élément de E , de composantes (a, b, c) dans la base \mathcal{B} . Déterminer par récurrence, la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de la fonction f ($n \geq 1$).
Démontrer que $f^{(n)}$ est un élément de E .
- b. On considère l'application φ_n de E dans E , qui à tout élément f de E associe $f^{(n)}$ ($n \geq 1$). Démontrer que φ_n est un endomorphisme de E . φ_n est-il un automorphisme de E ?
3. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2\}$.
- a. Démontrer que si n est pair, φ_n est la composée d'une projection sur F et d'une homothétie que l'on précisera.
- b. On considère l'endomorphisme ψ_n de F , qui à tout élément f de F associe $f^{(n)}$ ($n \geq 1$). Démontrer que si n est pair, ψ_n est une homothétie vectorielle, et que si n est impair, ψ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on précisera.

Partie B

1. On suppose toujours $m \neq 0$, et on considère le sous-espace vectoriel F . On désigne par F_1 l'ensemble des fonctions de F , impaires, et par F_2 , l'ensemble des fonctions de F paires.
- a. Démontrer que : $F = F_1 \oplus F_2$.
On démontrera l'égalité suivante :
- $$ae^{mx} + be^{-mx} = (a+b) \left[\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \right] + (a-b) \left[\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right]$$
- b. Déterminer dans la base $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2\}$, la matrice de la projection vectorielle p_1 de F sur F_1 parallèlement à F_2 ainsi que la matrice de la projection vectorielle p_2 de F sur F_2 parallèlement à F_1 .
2. On pose $C = p_2(f_2)$ et $S = p_1(f_1)$.
Démontrer pour tout x et y de \mathbb{R} , les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 & ; & \quad C(0) = 1 \\ C(-x) &= C(x) & ; & \quad S(-x) = -S(x) \\ C^2(x) - S^2(x) &= 1 \\ C(x+y) &= C(x)C(y) + S(x)S(y) \\ S(x+y) &= S(x)C(y) + S(y)C(x) \end{aligned}$$

En déduire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} S(2x) &= 2C(x)S(x) \\ C(2x) &= C^2(x) + S^2(x) \end{aligned}$$