Baccalauréat C Mexico février 1969

I

Déterminer les limites, lorsque x tend vers plus ou moins l'infini, de la fonction

$$y = \sqrt{x^2 + 4x} - x;$$

préciser les directions asymptotiques et les asymptotes de son graphe.

II

Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$; en déduire toutes les solutions de l'équation

$$z^8 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}.$$

III

Dans un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, le point fixe $\mathrm{A}(2\alpha~;~0)$ et la droite (D) d'équation $x = 2\alpha$, α étant un nombre réel non nul.
À un point M du plan $x\mathrm{O}y$ on fait correspondre M′ tel que, si B désigne l'intersection de OM avec (D) on ait $(\mathrm{O, B, M, M'}) = -1$.
On appelle T_α la transformation ponctuelle ainsi définie.

1. **a.** Que peut-on dire des droites AM et AM′ ?
   Indiquer une construction simple de M′, connaissant M.

   b. La transformation T_α est-elle involutive ?
   Admet-elle des points doubles ?
   Quel est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{T}_\alpha(\mathrm{M})$ soit défini ?

   c. Soit $(x~;~y)$ et $\left(x'~;~y'\right)$ les coordonnées respectives de M et M′.
   Établir que

   $$x' = \frac{\alpha x}{x-\alpha} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\alpha y}{x-\alpha}$$

   et retrouver analytiquement les résultats établis en **b**.
   Préciser le cas des points de $y'\mathrm{O}y$.
2. Montrer que la transformée d'une droite (Δ) est une droite, $\left(\Delta'\right)$.
   Préciser le cas où (Δ) est parallèle à (D).
   Lorsque (ll) coupe (D) et $y'\mathrm{O}y$, donner une construction simple de $\left(\Delta'\right)$.
   Une droite (D) peut-elle être invariante ?

3. Dans le cas où $\alpha = 2$, on considère le faisceau de cercles ayant U$(+ 4 ; + 2)$ et V$(+4 ; -2)$ comme points de hase. On désigne par λ l'abscisse du centre d'un cercle de ce faisceau.

Montrer que les transformées de ces cercles sont des coniques.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la conique pour $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ et $\lambda = 6$.

4. On considère l'ensemble, E, des courbes d'équation

$$x^2 = py^2 + q,$$

où p et q désignent des nombres réels.

a. Déterminer, en fonction de p, q et α, l'équation et préciser la nature des transformées des éléments de E par T_α.

b. Déterminer ceux des éléments de E qui sont des cercles et préciser en fonction de α et q la nature de leurs transformées.

c. Soit (γ) un cercle appartenant à E et dont la transformée par T_α est une parabole. Calculer l'aire du domaine intersection des intérieurs du cercle et de la parabole.

N.B. - Les questions **2.**, **3.** et **4.** du problème sont indépendantes.