

Baccalauréat C Mexico juin 1977

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{\text{Log } x}{x}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
b. Étudier si $\text{Log} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs positives.
En déduire que f est dérivable à droite au point 0.
3. Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de f (On précisera la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.)

EXERCICE 2

1. Montrer que la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(\text{Log } x)^2}$$

est décroissante pour $x \geq 2$. ($\text{Log } x$ représente le logarithme népérien de x .)

2. Trouver une primitive de la fonction f .
3. Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout n supérieur ou égal à 3 par

$$u_n = \sum_{i=3}^{i=n} \frac{1}{i(\text{Log } i)^2} = \frac{1}{3(\text{Log } 3)^2} + \frac{1}{4(\text{Log } 4)^2} + \dots + \frac{1}{n(\text{Log } n)^2}.$$

- a. En utilisant le théorème de la moyenne sur l'intervalle $[k; k+1]$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, déduire de la question 1. que

$$u_n \leq \int_2^n \frac{1}{x(\text{Log } x)^2} dx.$$

- b. Déduire de la question 2. que u_n est bornée lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Soit P le plan affine euclidien orienté et (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct de P . On désigne par (Γ) la courbe admettant pour équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

I.

1. Soit R la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$, on pose $\vec{e}_1 = R(\vec{i})$,
 $\vec{e}_2 = R(\vec{j})$.

Démontrer que l'équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $X^2 + 3Y^2 = 2$.

Quelle est la nature de (Γ) ?

En donner une représentation graphique dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (on prendra 6 cm comme unité de longueur).

2. Soit M et M' deux points, de P de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $M * M'$ le point de coordonnées $(xx' - yy'; xy' + yx' - yy')$.

À chaque point $M(x; y)$ de P , on associe la matrice $B_M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x - y \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer que $B_M \cdot B_{M'} = B_{M * M'}$ et que M est sur (Γ) si, et seulement si le déterminant de la matrice B_M est égal à 1.
- b. Démontrer que l'application qui à chaque point M associe la matrice B_M est injective. En utilisant les propriétés de la multiplication des matrices, déduire que $(\Gamma, *)$ est un groupe commutatif d'élément neutre, le point $A(1; 0)$.
3. Soit S la symétrie affine par rapport à la droite d'équation $y = 0$, dans la direction de la droite d'équation $y = 2x$. Définir analytiquement S et vérifier que si M^{-1} est le symétrique d'un point M de (Γ) pour la loi $*$, on a $M^{-1} = S(M)$.