Durée : 4 heures

Baccalauréat C Montpellier juin 1969

EXERCICE 1

On désigne par x et y deux nombres réels, par z le nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ et par Z le nombre complexe $\mathrm{i}z$. On appelle m l'image de z, M l'image de Z et A l'image de i.

1. **a.** Décrire géométriquement la transformation ponctuelle T qui, au point m, associe le point M.

   b. Calculer les coordonnées, X et Y, de M en fonction de celles de m.
2. Déterminer l'ensemble des points m tels que les trois points m, M et A soient alignés.

EXERCICE 2

Démontrer que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, l'entier

$$A = n^2\left(n^2-1\right)$$

est divisible par 12.

PROBLÈME

Soit a un nombre positif donné. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x\mathrm{O}y$, on considère le cercle, noté (O), de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$, et le cercle, noté (A), de centre A$(3a\,;\,0)$ et de rayon a. On appelle (D) la droite d'équation $y = a$.

1. Les cercles (O) et (A) définissent un faisceau (F). Préciser l'axe radical, (Δ), de ce faisceau et ses points limites, I et J.
2. On désigne par u l'abscisse d'un point M de (D), par p la puissance de M par rapport au cercle (O) et par p' la puissance de M par rapport au cercle (A).

   Démontrer que le rapport $\dfrac{p}{p'}$ a l'expression suivante :

   $$z = \frac{u^2-a^2}{(u-3a)^2}.$$

   Étudier les variations de z en fonction de u et construire le graphe, (C), de cette fonction par rapport à un repère orthonormé $u\Omega z$. Utiliser ce graphe pour discuter, suivant la valeur du nombre réel k, l'existence et le nombre des points M tels que $\dfrac{p}{p'} = k$.
3. Calculer l'aire, S, du domaine plan limité par l'axe Ωu et l'arc du graphe (C) défini par $-a \leqslant u \leqslant a$. On pourra, pour cela, déterminer trois réels, α, β, γ, tels que

   $$z = \alpha + \frac{\beta}{u-3a} + \frac{\gamma}{(u-3a)^2}.$$

4. On désigne par N l'intersection des polaires de M par rapport aux cercles (O) et (A) ; soit (Γ) le cercle de diamètre MN. Quelle est la nature de la famille des cercles (Γ) ainsi obtenus, lorsque M décrit la droite (D) ?

Donner, en utilisant les points I et J, une construction géométrique du point N associé à un point M donné.