Baccalauréat C Montpellier juin 1971

EXERCICE 1

Exprimer en fonction linéaire des sinus et cosinus de x et $3x$ la fonction f de la variable x définie par

$$f(x) = \cos^3 X + \sin^3 x.$$

En déduire l'expression de la primitive de cette fonction qui s'annule pour $x = 0$.

EXERCICE 2

Soit z un nombre complexe. On considère le nombre

$$Z = \frac{z+1}{z-1}.$$

Dans le plan complexe on désigne par M le point d'affixe z.

1. Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un nombre réel.
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que les points O, M et P soient alignés. Le point P est le point d'affixe Z et O l'origine des axes de coordonnées.

PROBLÈME

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$. Soit a un réel positif et λ un réel quelconque. On désigne par T_λ la transformation ponctuelle qui, à un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ définies par

$$x' = \frac{ax}{(1-\lambda)y + a\lambda} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{(1-\lambda)y + a\lambda}.$$

1. Quelle est cette transformation pour $\lambda = 1$?

   Supposons $\lambda \neq 1$.

   a. Quels sont les points du plan qui n'ont pas de transformé ?

   b. Déterminer les points invariants par cette transformation.

   c. Montrer que la droite MM' joignant un point non invariant et son transformé passe par O.
2. Soit λ un réel quelconque. Déterminer la transformation produit $T_{\lambda'} \circ T_\lambda$, la transformation T_λ étant effectuée la première.

   L'ensemble des transformations T_λ lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour la loi $\circ$?

   Déterminer λ pour que T_λ soit involutive.

Partie B

Dans la suite on suppose $\lambda = -1$.

1. Montrer que la transformée d'une droite (D) est une droite (D$'$). Cette droite peut-elle être parallèle à (D), ou confondue avec (D) ?
2. Déterminer les équations des cercles (Γ) du plan qui sont globalement invariants dans la transformation. Quel est l'ensemble (ou lieu géométrique) des centres de ces cercles ?
   Montrer que le cercle (C) de centre C$\left(0\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$ est orthogonal à tous les cercles invariants (Γ). Quelle est la nature de la famille de ces cercles (Γ) ?
   Déterminer la courbe transformée du cercle (C) et la construire avec soin.