

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Déterminer les restes de la division par 13 des quatre premières puissances de 5.
En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

$$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$$

est divisible par 13.

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel, \mathcal{P}_3 sur le corps des nombres réels, \mathbb{R} , des applications polynômes, de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à 2. Un élément, P , de \mathcal{P}_3 est déterminé par ses coefficients, a , b et c , réels et il définit la fonction

$$x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Démontrer que les ensembles suivants :

$$A = \{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = ax^2 + bx, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{et } B = \{P \in \mathcal{P}_3 / P(x) = \lambda x^2 - 2\mu x + \lambda, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{P}_3 .

Déterminer une base de A et une base de B et en déduire les dimensions de A et de B .

2. Déterminer l'intersection $A \cap B$ des deux sous-espaces A et B et la dimension de cette intersection.

3. Soit f l'application de \mathcal{P}_3 vers \mathcal{P}_3 définie par

$$P \mapsto Q = f(P),$$

où Q est la fonction polynôme définie par $Q(x) = P(x) + (x-1)P'(x)$, P' étant la fonction dérivée de P .

Montrer que f est une application linéaire.

PROBLÈME

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, à tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) on associe le point, m , de coordonnées x et y ; m est dit image de z , z est dit affixe de m . On désigne par A, B, C et D les images respectives des nombres -1 , $+1$, $\frac{1}{3}$ et 3 et par (C) le cercle de diamètre [AB].

À tout point m , différent de D , on associe son affixe z , puis le nombre complexe

$$Z = \frac{(3z-1)z}{z-3},$$

et enfin l'image M de Z .

On désigne par T l'application qui à m associe M .

1. Démontrer que Z peut s'écrire sous la forme $Z = az + b + \frac{c}{z-3}$ les nombres a, b et c étant des nombres réels.
2. On suppose que m parcourt l'axe $x'Ox$. Étudier alors la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{(3x-1)x}{x-3}$$

et tracer sa courbe représentative. En déduire l'image du segment $[AB]$ par T . Calculer l'aire comprise entre la courbe, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = e + 3$ et $x = 6$ (e désignant la base des logarithmes népériens).

3. Soit $Z_1 = \frac{3z-1}{3-z}$; démontrer que $|Z_1| = 3 \frac{mC}{mD}$ et $\arg Z_1 = (\overrightarrow{mD}, \overrightarrow{Cm})$.

4. Quel est l'ensemble des points m tels que $\frac{mC}{mD} = \frac{1}{3}$?

En déduire que pour ces points on a $|z| = |Z_1| = |Z| = 1$.

On suppose que m appartient au demi-cercle (C') de diamètre $[AB]$ qui contient l'image de i . Soit θ l'argument de z ($0 \leq \theta \leq \pi$) et φ l'argument de Z_1 .

Montrer que $\sin \varphi \geq 0$.

On suppose $0 \leq \varphi \leq \pi$. Calculer $\cos \varphi$ en fonction de $\cos \theta$ et en déduire que φ est une fonction croissante de θ .

Calculer une valeur approchée de φ lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$.