Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1975 Montpellier

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$7x - 4y = 4$$

2. Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}$ dans le système de base x et $\overline{49}$ dans le système de base y. Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}$ dans le système de base x et $\overline{125}$ dans le système de base y. Déterminer x et y puis a et b.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - x^2 \text{Log}\, x.$$

1. Étudier ses variations, tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité de longueur étant 1 cm. On précisera l'allure de la courbe aux bornes de l'ensemble de définition.
2. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre $x'\text{O}x$, (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

PROBLÈME

Partie A

Soit E le plan vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de E. On appelle φ_a l'application linéaire de E dans E dont la matrice, relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1-a & a\sqrt{3} \\ a\sqrt{3} & a-1 \end{pmatrix}$$

a étant un réel.

1. Pour quelles valeurs de a, φ_a est-elle bijective ? Pour quelles valeurs de a, φ_a est-elle involutive ?

   Quel est le noyau de φ_a ? Quelle est l'image de φ_a ?
2. On donne à a la valeur $1/2$.

   Quelle est la nature de $\varphi_{1/2}$? Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi_{1/2}$?Quelles sont les droites vectorielles globalement invariantes par $\varphi_{1/2}$?

Partie B

On désigne par $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien associé à E et on considère le repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ de $\mathscr{E}$. On appelle f l'application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est $\varphi_{1/2}$ et qui au point O associe le point A(O ; 2). Soit donc :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathscr{E} & \to & \mathscr{E}\\ & M(x~;~y) & \longmapsto & M'\left(x'~;~y'\right)\end{array}$$

1. Établir que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{x}{2} + \dfrac{y\sqrt{3}}{2}\\ y' & = & \dfrac{x\sqrt{3}}{2} - \dfrac{y}{2} + 2\end{array}\right.$$

puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

2. Soit z le nombre complexe affixe de M et z' l'affixe de $M' = f(M)$.

a. Écrire une relation entre z' et z.

b. Montrer que :

α f laisse globalement invariante la droite Δ d'équation

$$x - \sqrt{3}y + 0 = 0$$

α f est la composée de la symétrie orthogonale s_Δ par rapport à Δ et d'une certaine translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ étant un vecteur directeur de Δ.

3. On se propose de retrouver géométriquement le résultat précédent. On désigne par D et les droites d'équations :

$$x - y\sqrt{3} = 0 \quad \text{et} \quad x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

Soit s_D et s_Δ les symétries orthogonales par rapport à D et Δ.

a. Trouver deux vecteurs $\overrightarrow{\text{V}}$ et $\overrightarrow{\text{W}}$ respectivement parallèle et perpendiculaire à D tels que :

$$2\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{\text{V}} + \overrightarrow{\text{W}}$$

Soit $t_{\overrightarrow{\text{V}}}$ et $t_{\overrightarrow{\text{W}}}$ les translations de vecteurs $\overrightarrow{\text{V}}$ et $\overrightarrow{\text{W}}$.

b. Montrer que : $f = t_{\overrightarrow{\text{V}}} \circ t_{\overrightarrow{\text{W}}} \circ s_D$.

Vérifier : $t_{\overrightarrow{\text{W}}} \circ s_D = s_\Delta$ et conclure.

4. On donne la conique (C) d'équation $x^2 = 3y^2 - 6y$. Construire (C).

Écrire l'équation de $\left(C'\right)$, image de (C) par f. Mettre cette équation sous la forme $y = g(x)$. Construire $\left(C'\right)$ et écrire les équations de ses asymptotes.