

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1976 ∞

EXERCICE 1

a et b sont deux entiers naturels non nuls. On note M leur plus petit commun multiple et Δ leur plus grand commun diviseur.

Déterminer a et b pour qu'ils vérifient les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} a & \leq b \\ a+b & = 105 \\ M & = 12\Delta \end{cases}$$

(On pourra utiliser les entiers a' et b' tels que $a = \Delta a'$ et $b = \Delta b'$).

EXERCICE 2

Jean possède, dans le tiroir de son armoire, 5 paires de chaussettes noires, 3 paires de chaussettes vertes et 2 paires de chaussettes rouges, mais ces chaussettes sont mélangées dans le plus grand désordre et indiscernables au toucher.

Lorsque Jean est en train de s'habiller survient une panne de lumière. Jean, qui est pressé et qui n'a pas de lampe de poche, prend au hasard deux chaussettes dans le tiroir.

1. Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes noires.
2. Calculer, à 0,01 près par défaut, la probabilité pour que Jean ait tiré deux chaussettes de même couleur.
3. En supposant que le nombre de chaussettes vertes et le nombre de chaussettes rouges restent inchangés, calculer quel devrait être le nombre n de chaussettes noires ($n \in \mathbb{N}^*$) contenues dans le tiroir pour que la probabilité d'avoir deux chaussettes noires soit égale à $\frac{2}{7}$.

PROBLÈME

Partie A

1. Étudier l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

Variation, Représentation graphique.

2. a. Montrer, sans chercher à calculer l'intégrale, que :

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

détermine une application u de $[0 ; +\infty[$ dans $[0 ; +\infty[$. Quel est le sens de variations de u ?

- b. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1 ; +\infty[$

$$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{x}$$

- c. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle \mathbb{R} , $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

En déduire :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 \quad \text{et} \quad u(x) \leq x$$

- d. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $u(x) \leq 2$.
 e. Montrer que l'ensemble $u([0 ; +\infty[)$ possède une borne supérieure ℓ telle que $0 \leq \ell \leq 2$, et que u tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

Partie B

1. a. Montrer que $x \mapsto \operatorname{tg} x$ détermine une bijection v de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ sur $[0 ; +\infty[$. On note v^{-1} la bijection réciproque de v .
 b. On dispose ainsi d'une application $w = u \circ v$ de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ dans $[0 ; +\infty[$.
 Montrer que w est dérivable en tout point x de l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $w'(x)$.
 En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \quad w(x) = x + k$$

- c. Calculer $w(0)$.
 Montrer que w tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. On pourra commencer par montrer que :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \quad 0 \leq w(x) \leq \operatorname{tg} x.$$

- d. Déduire de cette étude :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[, \quad (u \circ v)(x) = x.$$

En résulte-t-il que les applications u et v^{-1} sont égales?

Quelle est la valeur du réel ℓ introduit en A 2. e.?

2. Tracer les représentations graphiques des applications u et v dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.