

∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1977 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit E un plan affine muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $(x; y)$ les coordonnées d'un point M dans ce repère.

Soit $P = \{M \in E / x^2 - 2y = 0\}$.

1. Vérifier que $\vec{T} = \vec{i} + \lambda \vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à P au point Ω d'abscisse λ ?
Montrer que pour tout λ , (\vec{T}, \vec{j}) forme un système libre.
2. Déterminer, en fonction de λ et des coordonnées x, y d'un point M les coordonnées x', y' du point M' image de M par la symétrie oblique f_λ d'axe $\mathcal{D}(\Omega, \vec{j})$ et de direction \vec{T} .
3. Montrer que $f_\lambda(P) = P$.

EXERCICE 2

3 POINTS

Résoudre dans \mathbb{Z} :

1. l'équation $3x \equiv 1 \pmod{5}$
2. l'équation $5x \equiv 2 \pmod{7}$
3. le système formé par les deux équations précédentes.

PROBLÈME

12 POINTS

(le 3. peut être traité indépendamment des autres questions).

1. Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Étudier f et tracer sa représentation graphique C dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier que pour tout x de \mathbb{R} :

$$f(x) + f'(x) = e^x$$

$$[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1$$

2. Soit M un point de C d'abscisse x_0 . ($x_0 \in \mathbb{R}'_+$).

Soit m le point de coordonnées $(x_0; 0)$ et P la projection orthogonale de m sur la droite Δ tangente en M à C .

Déterminer en fonction de x_0 les coordonnées de P et vérifier que ces coordonnées peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} X &= x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \\ Y &= \frac{1}{f(x_0)} \end{cases}$$

Calculer $\|\vec{mP}\|$.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

3. Soit la fonction

$$x \mapsto \text{Log} \left[\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right] - \sqrt{1-x^2}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que :

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

b. Étudier F et tracer la représentation graphique Γ de F dans le plan P rapporté au même repère.

Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} définie sur \mathbb{R}_+ (on ne demande pas de déterminer F^{-1}).

Construire la représentation graphique T de F^{-1} sur la même figure.

4. a. Montrer que le point P est sur la courbe T . (on pourra utiliser le 1.).

b. Montrer que m appartient à la tangente en P à la courbe T .