

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Montpellier ∞

EXERCICE 1

4 points

On considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (n, p) &\mapsto 2^n(2p+1).\end{aligned}$$

- Calculer $\varphi(0, 0)$, $\varphi(3, 4)$ et $\varphi(2, 6)$.
 - Décomposer 1 584 en produit de facteurs premiers. Déterminer l'antécédent de 1 584 par φ .
 - Montrer que φ est bijective.
- On définit une loi de composition interne notée T dans \mathbb{N}^2 par :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \forall (n', p') \in \mathbb{N}^2, (n, p)T(n', p') = (n + n', 2pp' + p + p').$$

- Calculer $(3, 4)T(2, 6)$.
- Résoudre l'équation $(3, 4)T(n, p) = (4, 49)$.
- Démontrer que l'application φ est un isomorphisme de (\mathbb{N}^2, T) sur (\mathbb{N}^*, \times) .
- Est-ce que (\mathbb{N}^2, T) admet un élément neutre? Quels sont les éléments symétrisables?

EXERCICE 2

4 points

On considère dans \mathbb{C} les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β .

- Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul?
- Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).
Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de (A, $|b|$) et (B, $|a|$).
- À l'aide du 1. montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que \overrightarrow{OI} est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .

PROBLÈME**12 points****Partie A**

Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{(a, b)} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix} \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On pose $I = M_{(0, 1)}$ et $J = M_{(1, 0)}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de base (I, J) de l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices 2×2 .
2. Calculer J^2 . En déduire que si $M \in E$, $M' \in E$ alors $M \times M' \in E$.
Montrer que (E, +, \times) est un anneau commutatif unitaire.
3. Quelles sont les matrices $M_{(a, b)}$ inversibles dans E? Exprimer alors $M_{(a, b)}^{-1}$ dans la base (I, J).

Partie B

Dans ce qui suit on suppose $b = 0$.

Soit V le plan vectoriel euclidien de base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Soit P un plan affine d'espace vectoriel associé V; P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f_a l'application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans (\vec{i}, \vec{j})

$$M_{(a, 0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

et qui au point O fait correspondre le point $O'(0; a+3)$.

1. Déterminer analytiquement f_a .
2. Pour quelles valeurs de a, f_a est-elle une bijection?
Déterminer analytiquement, quand elle existe f_a^{-1} .
3. Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble D des points invariants par f_a .
4. Démontrer que seule l'application f_1 , obtenue pour la valeur 1 du paramètre a, est une involution que l'on caractérisera.
5. f_a peut-elle être une isométrie?
6. On prend $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit G le barycentre des points $A(\alpha; \alpha)$, $B(\alpha; 2)$, $C\left(\alpha; -2\frac{\text{Log } \alpha}{\alpha}\right)$.
Trouver les coordonnées de G; en déduire une équation cartésienne de la courbe décrite par G quand α varie dans \mathbb{R}_+^* .
7. Soient A_1, B_1, C_1 les images des points A, B, C par l'application f_1 (définie en B 4.).
Soit G_1 le barycentre de A_1, B_1, C_1 respectivement affectés de 1, 2, -1.
Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par G_1 quand α varie dans \mathbb{R}_+^* .

Partie C

Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction numérique g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\text{Log } x}{x}.$$

1. On considère la fonction

$$h: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 2\text{Log } x + 2 \end{cases}$$

Étudier les variations de h et préciser le signe de $h(x)$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).

2. Étudier les variations de la fonction g . Montrer que la courbe (\mathcal{C}) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que (\mathcal{C}) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .
3. Soit (\mathcal{C}_1) la transformée de (\mathcal{C}) par f_1 (définie dans B 4.).
- Écrire une équation de (\mathcal{C}_1) . (\mathcal{C}_1) est la courbe représentative d'une fonction g_1 .
 - Montrer que (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) ont les mêmes droites asymptotes. Tracer (\mathcal{C}_1) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ que (\mathcal{C}) sans étudier g_1 .
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = m$ ($m > 1$) et les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) .