Baccalauréat C Montpellier juin 1983

EXERCICE 1

Un forain a construit un appareil de jeu contenant six boules blanches et trois boules rouges. Lorsqu'on introduit un jeton dans l'appareil, trois boules tombent dans un panier. On traitera l'exercice en admettant que toutes les boules ont la même probabilité de tomber dans le panier.
Si les trois boules obtenues sont rouges, le joueur gagne un lot de 100 francs.
Si deux des boules obtenues sont rouges, le joueur gagne un lot de 15 francs.
Si une des trois boules est rouge, le joueur gagne un lot de 5 francs.
Si les trois boules sont blanches, le joueur ne gagne rien. Le prix du jeton est fixé à 8 francs.

1. La variable aléatoire X désignant la valeur du lot gagné par le joueur, déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.
   En déduire le gain moyen du forain.
2. L'appareil ne s'avérant pas suffisamment rentable, le forain envisage deux solutions : augmenter de 1 franc le prix du jeton, ou bien ajouter une boule blanche à l'intérieur de l'appareil. Quelle est la solution la plus rentable pour le forain ?

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie comme suit :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 2 \quad &: \quad f(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x+2} \\ x > 2 \quad &: \quad f(x) = x - 1 - \frac{1}{\log(x-2)}. \end{aligned}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? En quels points f est-elle continue ? En quels points f est-elle dérivable ?
2. Étudier les variations de f. Construire la courbe représentative de f.
3. Montrer qu'il existe une bijection g de $\left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\ ;\ 1\right]$ telle que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right], \qquad g(x) = f(x).$$

   Calculer $g^{-1}(y)$ pour tout $y \in \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\ ;\ 1\right]$.

PROBLÈME

Partie A

Soit $\overrightarrow{E}_3$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ une base de $\overrightarrow{E}_3$.
On définit une forme bilinéaire symétrique φ sur $\overrightarrow{E}_3$ de la façon suivante :

$$\text{si } \overrightarrow{u}_1 = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}_2 = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k},$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{u}_1,\ \overrightarrow{u}_2\right) = 2x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1z_2 + y_2z_1.$$

1. **a.** Prouver que $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}_3 - \{\overrightarrow{0}\}$, $\varphi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}) > 0$. (Ainsi φ définit un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}_3$).

   Dans toute la suite du problème, les termes orthonormé, orthogonal, unitaire, ...s'entendent eu sens de φ.

   b. Calculer $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k}$.

2. Soit $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

   a. Montrer que $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire.

   b. Soit $\overrightarrow{D}$ la droite vectorielle de base $(\overrightarrow{I})$. Quelle est la nature de l'orthogonale de $\overrightarrow{D}$? En donner une équation (on notera $\overrightarrow{D}^{\perp}$ l'orthogonal de $\overrightarrow{D}$).

   c. Montrer que $\left(\overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K}\right)$ où $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{K} = \overrightarrow{k}$, est une base orthonormée de $\overrightarrow{D}^{\perp}$.

   En déduire que $\left(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}_3$.

Partie B

Soient a et b deux réels non tous deux nuls, $\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$ et $F_{a,\,b}$ l'endomorphisme de $\overrightarrow{E}_3$ défini par :

$$\begin{aligned}
F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{i}\right) &= \lambda\overrightarrow{i} + (a-\lambda)\overrightarrow{j} + (b-a+\lambda)\overrightarrow{k},\\
F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{j}\right) &= (a-b)\overrightarrow{j} + 2b\overrightarrow{k},\\
F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{k}\right) &= -b\overrightarrow{j} + (a+b)\overrightarrow{k}.
\end{aligned}$$

1. Montrer que $F_{a,\,b}$ est bijectif.
2. Déterminer $F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{I}\right)$.
3. Déterminer $F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{J}\right)$ et $F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{K}\right)$. En déduire $F_{a,\,b}\left(\overrightarrow{D}^{\perp}\right) = \overrightarrow{D}^{\perp}$. Soit $G_{a,\,b}$ l'endomorphisme de $\overrightarrow{D}^{\perp}$ tel que

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}^{\perp}, \qquad G_{a,\,b}\left(\overrightarrow{u}\right) = F_{a,\,b}(\overrightarrow{u}).$$

   Montrer que dans la base $(\overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J})$ la matrice de $G_{a,\,b}$ est $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$.

4. Nature et caractérisation de $F_{1,\,0}$, de $F_{-1,\,0}$ et de $F_{0,\,1}$.
5. Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $F_{a,\,b}$ soit une isométrie ?
6. Nature et caractérisation de $\dfrac{1}{\lambda}F_{a,\,b}$.

Partie C

Soit $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K}\right)$ un repère orthonormé direct d'un espace affine euclidien E_3 associé à $\overrightarrow{E}_3$.

On désigne par f l'application affine de E_3 dans E_3 ayant pour application linéaire associée $F_{0,\,\sqrt{2}}$ et laissant le point O invariant.

Soit E l'ellipse du plan de repère $(O,\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K})$ ayant pour équation dans le repère $(O,\ \overrightarrow{J},\ \overrightarrow{K})$:
$\dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$.
Préciser grand axe, petit axe, foyers, et sommets de E. Montrer que $E' = f(E)$ est une ellipse dont on indiquera le grand axe, le petit axe, les foyers et sommets. Construire E et E' sur une même figure.