

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Montpellier septembre 1971 œ

EXERCICE 1

On désigne par  $g \circ f$  la fonction composée des fonctions  $f$  et  $g$  qui, à tout  $x$  réel, associe

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

On note  $f \circ f = f^2, f^2 \circ f = f^3, \dots, f^{n-1} \circ f = f^n$ .

Soit  $f$  la fonction affine de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = ax + b.$$

Déterminer  $f^2, f^3, \dots, f^n$  en calculant  $f^2(x), f^3(x)$ , puis  $f^n(x)$  par récurrence.

Réciproquement, soit la fonction affine  $h$  telle que

$$h(x) = \alpha x + \beta.$$

Déterminer une fonction affine  $f$  telle que  $f^n = h$ .

Discuter.

**N.-B.** - Les lettres  $a, b, \alpha$  et  $\beta$  désignant des nombres réels.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe 2 et les transformations ponctuelles suivantes :

$H_1$  : homothétie de centre A et de rapport 2,

$H_2$  : homothétie de centre O et de rapport  $-\frac{1}{2}$ ,

$R$  : rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

1. Quelle est la nature de la transformation

$$H_2 \circ R \circ H_1?$$

2. Quelle est la nature de la transformation

$$H_2 \circ R \circ R \circ H_1?$$

(On rappelle que la notation  $T_2 \circ T_1$  désigne le produit des transformations  $T_1$  et  $T_2$  la transformation  $T_1$  étant effectuée la première.)

On donnera les caractéristiques géométriques de ces transformations.

**PROBLÈME**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle qui à  $x$  fait correspondre

$$f(x) = x + \text{Log}(x^2 - 1)$$

(Log désigne le logarithme népérien), et soit  $(\Gamma)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ .

**Partie A**

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ , puis le comportement de  $f(x)$  aux bornes de ce domaine de définition. Quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , on pourra montrer d'abord que

$$\text{Log}(x^2 - 1) = 2\text{Log}|x| + \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

puis mettre  $f(x)$  sous la forme  $xg(x)$ .

2. Dresser le tableau des variations de  $f(x)$ . Donner sur la copie tout calcul numérique utile. Indiquer le procédé utilisé (règle, table).  
Construire  $(\Gamma)$ .

**Partie B**

1. Soit la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + h$ .  
Montrer que, quel que soit  $h$ ,  $(D)$  coupe  $(\Gamma)$  en deux points  $M$  et  $M'$ ; donner leurs coordonnées.  
En déduire une transformation ponctuelle dans laquelle  $(\Gamma)$  est globalement invariante.  
Soit  $(T)$  la tangente en  $M$ ,  $(T')$  la tangente en  $M'$  à  $(\Gamma)$ . Montrer que le point I intersection de  $(T)$  avec  $(T')$  est sur  $y'Oy$ .
2. Calculer en fonction de  $h$  l'aire  $(\Sigma)$  du triangle  $IMM'$ . Calculer le minimum de  $(\Sigma)$  quand  $h$  varie.  
On demande enfin de calculer

$$\int [x + \text{Log}(x^2 - 1)] dx$$

lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $] + 1; +\infty[$ .

On pourra, pour cela, calculer la dérivée de

$$x - \text{Log}(x + 1)$$

et celle de  $x\text{Log}(x + 1)$ , afin d'en déduire

$$\int \text{Log}(x + 1) dx,$$

et procéder de même pour obtenir

$$\int \text{Log}(x - 1) dx.$$