

♣ Baccalauréat C Montpellier septembre 1979 ♣

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$5x - 4y = 1.$$

2. Un entier naturel n s'écrit $\overline{52}$ dans un système de numération de base x et $\overline{43}$ dans un autre système de base y .

Quelles sont les valeurs possibles de x et de y ?

EXERCICE 2

4 POINTS

À tout nombre complexe z on associe son image m dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout nombre complexe z différent de i , on pose :

$$Z = \frac{2z - 4}{z - i}$$

1. Comment choisir l'image m de z pour que Z soit réel?

2. Comment choisir l'image m de z pour que Z ait pour argument $-\frac{\pi}{2}$?

On peut traiter cet exercice par le calcul ou par un raisonnement géométrique.

PROBLÈME

13 POINTS

Les parties A et B sont deux exemples d'une même situation mathématique, dans un plan affine euclidien d'une part, en analyse d'autre part. Elles peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On donne un plan vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

On dira qu'un endomorphisme φ de E possède la propriété (A) lorsqu'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que, pour tout $\vec{u} \in E$,

$$\|\varphi(\vec{u})\| \leq k \|\vec{u}\|.$$

1. φ est défini par sa matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On pose $\vec{u} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}$ ($r > 0; 0 \leq \theta < 2\pi$).

Calculer en fonction de r et θ :

$$F(r, \theta) = \left\| \varphi \left(r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \right) \right\|^2.$$

et démontrer que φ possède la propriété (A), par exemple pour $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on pourra mettre $F(r, \theta)$ sous la forme $A + B \cos 2\theta + C \sin \theta \cos \theta$.

2. Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel E , muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et f une application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé, noté φ , possède la propriété (A). 1_E est l'application identité de E . Démontrer que l'endomorphisme $\varphi - 1_E$ est bijectif.

En déduire que f possède un point invariant et un seul, Ω , déterminé par l'équation :

$$\varphi(\overrightarrow{O\Omega}) - \overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{O'O} \quad \text{où } O' = f(O).$$

Soit M_0 un point du plan P . On définit la suite M_0, M_1, \dots , par :

$$M_n = f(M_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\| = 0$.

3. On considère les suites numériques $(x_n), (y_n)$ définies par

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-1} + 2 \\ y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} - 1 \end{cases}$$

Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer leurs limites,

Partie B

a est un réel strictement positif. On donne l'application :

$$\begin{aligned} f:]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2}{3}x + \frac{a^3}{3x^2} \end{aligned}$$

1. Construire la courbe représentative. On étudiera particulièrement le point d'intersection avec la droite $y = x$ et la tangente en ce point.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}; x_0 > a$. On pose

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Démontrer que l'on a :

$$a < x_n < x_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Etablir l'inégalité :

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{a}(x-a) \quad \text{pour } x \geq a$$

En déduire l'inégalité :

$$x_n - a \leq \frac{2}{a}(x_{n-1} - a)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

3. Démontrer une inégalité de la forme :

$$\frac{x_n - a}{a} \leq A_n \left(\frac{x_0 - a}{a} \right) u_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où les A_n et les u_n sont des entiers que l'on déterminera en fonction de n .

On suppose $\frac{x_0 - a}{a} \leq \frac{1}{10}$. Quel est le plus petit entier n pour lequel

$$\frac{x_n - a}{a} \leq 10^{-8} ?$$