Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Montpellier septembre 1969 ∽

EXERCICE 1

Résoudre le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos 2x - 3\cos x + 2 & < & 0,\\ 0 & \leqslant x & < 2\pi.\end{array}\right.$$

Représenter, sur un cercle trigonométrique, les solutions de ce système.

EXERCICE 2

1. Construire le graphe de la fonction f de la variable x, définie par

$$f(x) = x\sqrt{2-x}.$$

   Déterminer la tangente au graphe au point d'abscisse 2.

2. Utiliser le graphe pour discuter, suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des racines de l'équation

$$x\sqrt{2-x} - m = 0.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy. On désigne par E l'ensemble des points du plan non situés sur la droite d'équation $x = 0$.
On désigne par T la transformation ponctuelle qui, à tout point M, de coordonnées x et y, appartenant à E, associe le point M', de coordonnées

$$x' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

On écrira, dans ce cas, $M' = T(M)$.

1. Montrer que T applique l'ensemble E dans lui-même et qu'elle est une transformation involutive.
2. Soit I le point de coordonnées $(+\,1\,;\,0)$. Montrer que les trois points I, M et M' sont alignés.
   Déterminer l'ensemble, D, des points M tels que I soit le milieu de MM'.
3. Lorsque M n'appartient pas à D, on appelle I$'$ le conjugué harmonique de I par rapport à M et M' et J la projection orthogonale de I$'$ sur l'axe des x.
   Démontrer que J est indépendant du point M.
   En déduire une construction de M' à partir de M si ce dernier n'appartient pas à l'axe des x.
   Donner une construction de M' si M appartient à l'axe des x ; on pourra utiliser, pour cela, le point K, de coordonnées $(0\,;\,+\,1)$.

4. Il est convenu, pour toute la suite, que, sur les courbes dont il sera question, seuls seront considérés les points appartenant à l'ensemble E (c'est-à-dire que, toutes les fois qu'une équation en x et y sera écrite, la condition supplémentaire $x0$ sera sous-entendue).

On appelle $C(\alpha,\ R)$ le cercle d'équation

$$x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-R^2=0,$$

α désignant un réel quelconque et R un réel strictement positif.

Écrire l'équation de la courbe $\Gamma(\alpha,\ R)$, transformée du cercle précédent par l'application T.

On appelle L et L$'$ les points de contact du cercle $C(\alpha,\ R)$ avec ses tangentes parallèles à Ox.

Exprimer les coordonnées de ces deux points en fonction de α et R.

Déterminer les deux ensembles Λ_1 et Λ_2, ensembles des positions de L et L$'$ correspondant à des valeurs de α et R qui réalisent respectivement les deux circonstances suivantes :

a. $\Gamma(\alpha,\ R)$ est un cercle ; comparer dans ce cas $C(\alpha,\ R)$ et $\Gamma(\alpha,\ R)$;

b. $\Gamma(\alpha,\ R)$ est une parabole. Dessiner ces deux ensembles.